2025.4.9(三)～

臺北市立建國高級中學 114 學年度第 1 次正式教師甄選 數學科題目卷

一、填充題（每題 6 分，共計 72 分）

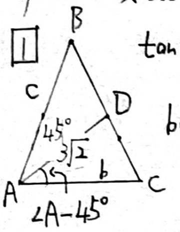
"用 sin & cos 有兩个变数，計算量大，考慮 tan，一个变数比較容易"

$\frac{9}{2}$ 1. $\triangle ABC$ 中，已知 $\tan A=\frac{4}{3}$，D 為 $\overline{BC}$ 上一點，$\overline{AD}=3\sqrt{2}$、$\angle BAD=45^\circ$，則 $\triangle ABC$ 面積的最小值為 ＿＿＿＿＿。

2. $\triangle OAB$ 中，已知 $\overline{OA}=\sqrt{7}$、$\overline{OB}=\sqrt{13}$、$\overline{AB}=\sqrt{10}$，C 為 $\overline{AB}$ 中點，D 為 $\overline{OC}$ 中點。過 D 點作直線 OA 的垂線分別

$(\frac{3}{7},\frac{3}{5})$ 與 $\overline{OA}$、$\overline{OB}$ 交於 P、Q 兩點。設 $\overrightarrow{OP}=m\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OQ}=n\overrightarrow{OB}$，其中 m,n 為實數，則數對 $(m,n)=$ ＿＿＿＿＿。

$\boxed{1}$



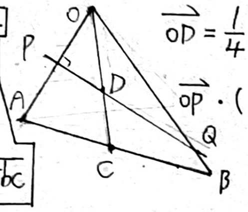
$\tan(\angle A-45^\circ)=\dfrac{\frac{4}{3}-1}{1+\frac{4}{3}}=\dfrac{1}{7}$

$bc\cdot\frac{4}{5}=b\cdot3\sqrt{2}\cdot\frac{1}{5\sqrt{2}}+c\cdot3\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow bc=\frac{3}{4}b+\frac{15}{4}c\geq2\cdot\frac{1}{4}\sqrt{45bc}$

$\Rightarrow\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5}bc\geq\frac{45}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5}=\frac{9}{2}$

$\boxed{2}$



$\overrightarrow{OD}=\frac{1}{4}(\frac{1}{m}\overrightarrow{OP}+\frac{1}{n}\overrightarrow{OQ})\Rightarrow\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=4$

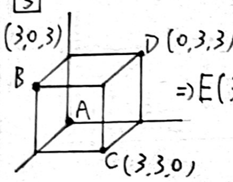
$\overrightarrow{OP}\cdot(\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OQ})=0\Rightarrow m^2\cdot7=mn\cdot\frac{10}{2}\Rightarrow\frac{1}{n}=\frac{1}{m}\cdot\frac{5}{7}$

$\Rightarrow\frac{12}{7}\cdot\frac{1}{m}=4\Rightarrow m=\frac{3}{7},\ n=\frac{3}{5}$

$\frac{2\sqrt{6}}{9}$ 3. 在邊長為 1 的正四面體 $ABCD$ 中，若點 E 在 $\overline{BC}$ 上且 $\frac{\overline{BE}}{\overline{EC}}=\frac{1}{2}$，則直線 AE 與直線 CD 的距離為 ＿＿＿＿＿。

$\sqrt{2}$ 4. 已知橢圓 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）和函數圖形 $y=\frac{1}{x}$ 在第一象限有唯一一個交點 P。令橢圓 C 的兩焦點為 F_1、F_2，且 S 為 ΔPF_1F_2 的面積，則 $\lim_{a\to\infty}S=$

$\boxed{3}$



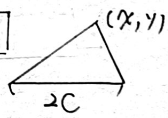
$\Rightarrow E(3,1,2)$

$\begin{vmatrix}0&-1&1&0&-1\\3&1&2&3&1&2\end{vmatrix}$ $1\ \ -5\ \ 1$

$\Rightarrow E_A: x-5y+z=0$

$d(D,E_A)\cdot\frac{1}{3\sqrt{2}}=\frac{12}{3\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{3\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{6}}{9}$

$\boxed{4}$



$Bx^2+Ay^2=AB$

$\begin{cases}x=\frac{1}{y}\end{cases}$

$\Rightarrow Ay^4-ABy+B=0\Rightarrow y^2=\frac{B}{2}$

$D=0\Rightarrow AB=4\Rightarrow ab=2$

$\triangle=cy$

$\sqrt{a^2-b^2}\cdot\frac{\sqrt{b^2}}{\sqrt{2}}$

$\xrightarrow{b\to0}\sqrt{2}$

$\frac{53}{108}$ 5. 投擲 5 個公正骰子，則其中存在 2 個骰子的點數和為 10 的機率為 ＿＿＿＿＿。（已知 $6^5=7776$，$5^5=3125$）

6. 已知 A 為二階方陣，滿足 $(A+I)^2=O$ 且 $A\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\-2\end{bmatrix}$，其中 I 為二階單位矩陣，O 為二階零矩陣，則 $A^{100}=$ ＿＿＿。

$\begin{bmatrix}-49&-50\\50&51\end{bmatrix}$

$\boxed{5}$ =次數

點數					
4	5	6	1	2	3
0	1				
	1	0			
0	1	0			
0	0				
	0	0			
0	0	0			

$1-\dfrac{(C^5_1\times4^4\times2-C^5_1\times3^4)+(2^4\times2-3^4)}{6^5}=\dfrac{53}{108}$

$\boxed{6}$ $(A+I)\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}=(A+I)\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$

$(A+I+(-I))^{100}=C^{100}_1(A+I)(-I)^{99}+I$

$=\begin{bmatrix}-49&-50\\50&51\end{bmatrix}$ #

$\Rightarrow(A+I)\begin{bmatrix}1&1\\1&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\-1&0\end{bmatrix}\Rightarrow A+I=-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&0\\-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&-1\\-1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}$

7. 設 $f(\theta)=\dfrac{7+\cos2\theta}{3+\sin\theta}$，其中 θ 為實數，$\theta\in[0,2\pi]$。令 $f(\theta)$ 的最大值為 M，最小值為 m，則數對 $(M,m)=$ ＿＿＿＿。

$M=12-4\sqrt{5}$

$m=3/2$

$\boxed{7}$ $\dfrac{-2(S^2-4)}{S+3}$

$2S(S+3)=S^2-4\Rightarrow S=-3+\sqrt{5}$

$\Rightarrow S^2+6S+4=0\rightarrow-2\cdot(10-6\sqrt{5}/\sqrt{5})=12-4\sqrt{5}\doteqdot3.056$

$3\leftarrow-1\leq S\leq1\rightarrow\frac{3}{2}$ $(-1,3)$ $(1,\frac{3}{2})$

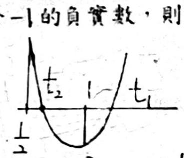
8. 設 b,c 皆為整數且 c 小於 10。已知有兩個實數 x 滿足方程式 $4^x-b\cdot2^x+c=0$，而這兩個實數其中一個是正實數，另一個是大於 -1 的負實數，則滿足題目條件的數對 (b,c) 有 ＿＿＿＿＿ 組解

36

$\boxed{8}$ 令 $t=2^x$

$\alpha>0\Rightarrow t_1>1$

$-1<\beta<0\Rightarrow\frac{1}{2}<t_2<1$ 令 $f(t)=t^2-bt+c$



$f(1)=-b+c+1<0$

$f(\frac{1}{2})=\frac{1}{4}-\frac{b}{2}+c>0$ $\Rightarrow c+1<b<2c+\frac{1}{2}$

C	C+1	2C+½	b	个数
9	10	18	11-18	8
8	9	16	10-16	7
7	8	14+½	9-14	6
6	7	12+½	8-12	5
5	6	10	7-10	4
4	5	8	6-8	3
3	4	6	5,6	2
2	3	4	4	1

$\rightarrow36$

Created with Scanner Pro

9. 已知 $x=x_1+x_2i$，$y=y_1+y_2i$，$z=z_1+z_2i$，其中 x_1,x_2,y_1,y_2,z_1,z_2 為實數。若 $|x|=|y|=|z|$，$x+y+z=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\sqrt{5}i$，$xyz=\sqrt{3}+\sqrt{5}i$，則 $x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=$

$\frac{\sqrt{15}}{4}$

Jimmy92888

$\boxed{9}$ $|x|=r=\sqrt{2}$

$\Rightarrow 2=x\bar{x}$

$\Rightarrow \frac{1}{x}=\frac{1}{2}\bar{x}$

$x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-\boxed{2xyz\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)}$ → $xyz(\overline{x+y+z})$

$\frac{1}{2}Im(x^2+y^2+z^2)=\frac{1}{2}Im\left(\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\sqrt{5}i\right)^2-(\sqrt{3}+\sqrt{5}i)\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\sqrt{5}i\right)\right)=\frac{1}{2}\left(\sqrt{15}-\sqrt{15}+\frac{\sqrt{15}}{2}\right)=\frac{\sqrt{15}}{4}$

10. 已知 n 是不小於 4 的正整數。投擲一個公正的骰子 n 次，每次投擲的結果互不影響。設 a_i 為第 i 次出現的點數，$i=1,2,\cdots,n$，$K_n=|1-a_1|+|a_1-a_2|+\cdots+|a_{n-1}-a_n|+|a_n-6|$，$L_n=K_n+|a_4-4|$，$r_n$ 是 L_n 的所有可能值中的最小值，則 $L_n=r_n$ 的機率 $p_n=$ ________。（以 n 表示）

$\frac{10(n-2)(n-3)}{6^n}$

peteror2o

L_n 有 min

$L_n=|1-a_1|+|a_1-a_2|+|a_2-a_3|+|a_3-a_4|+|a_4-4|+|a_4-a_5|+\cdots+|a_n-6|$

$\Leftrightarrow 1\le a_1\le a_2\le a_3\le a_4=4\le a_5\le\cdots\le a_n\le 6$

$P_n=\frac{H^4_3H^3_{n-4}}{6^n}=\frac{C^6_3C^{n-2}_2}{6^n}=\frac{10(n-2)(n-3)}{6^n}$

11. 設實數 $x_1,x_2,\cdots,x_{25}$ 滿足 $\sum_{k=1}^{25}x_k=0$ 與 $\sum_{k=1}^{25}x_k^2=1$，則 $\sum_{k=1}^{25}|x_k|$ 的最大值為

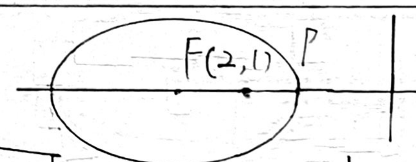
$\frac{4\sqrt{39}}{5}$

$\boxed{12}$ $\overline{PF}=d(P,L)\cdot e \Rightarrow e=\frac{c}{a}=\frac{1}{5}$

$d(F,L)=2$

12. 設 x,y 為實數，已知所有滿足 $25\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}=|3x+4y|$ 的點 (x,y) 所形成的圖形是橢圓，則此橢圓的正焦弦長為 ________。

$\frac{4}{5}$



$L:3x+4y=0$

$a(a-c)=(2-(a-c))c$

$\Rightarrow a^2-ac=2c-ac+c^2$

$\Rightarrow b^2=2c \Rightarrow \frac{2b^2}{a}=\frac{4}{5}$

$\boxed{11}$

Jimmy92888

設 $x_1,\cdots x_{25}$ 中，有 p 個正數 $a_1,\cdots a_p$，q 個負數 $b_1,\cdots b_q$

令 $k=a_1+\cdots+a_p=-(b_1+\cdots+b_q)$

$\left(\sum_{i=1}^{p}a_i^2\right)p\ge k^2$

$\left(\sum_{i=1}^{q}b_i^2\right)q\ge k^2$

$\Rightarrow 1\ge k^2\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)$

$\Rightarrow k^2\le\frac{pq}{p+q}$

當 $(p,q)=(12,13)$ or $(13,12)$ 時

$2k$ 有 $max=\frac{4\sqrt{39}}{5}$

二、計算題（各題配分列於題後，全部 2 大題，共計 28 分）

1. 已知數列 $\langle a_n\rangle$ 的首項 $a_1=\frac{1}{4}$，且對於所有的正整數 n 滿足 $a_{n+1}=\frac{5}{8}-\frac{1}{2}(a_n)^2$：

Created with Scanner Pro