臺中市立臺中第二高級中等學校

114 學年度　第 1 次教師甄選　數學科 試題

計 2 張 3 面

一、填充題：每格 5 分，共 10 格，合計 50 分

1. 設 $x \in R$，求 $f(x)=\sqrt{x^4-x^2-6x+10}-\sqrt{x^4-3x^2+4}$ 的最大值為________。

2. 第一次段考英文考題包含選擇題與寫作題兩部分，某班學生英文選擇題分數 (X) 之標準差為 $\sigma_X=10$；寫作題分數 (Y) 之標準差為 $\sigma_Y=3$；兩部分分數相加後之英文成績 $(X+Y)$ 的標準差為 $\sigma_{X+Y}=12$。試求選擇題分數 (X) 與寫作題分數 (Y) 相關係數為________。(答案以最簡分數表示)

3. 由 $1,2,3,\cdots,12$ 十二個數字中隨機取出四個相異的數，每個數被取出的機會皆相等，令 S 表示此四數的乘積，求 S 為完全平方數的機率為________。

4. 袋中有 5 張紙牌，其中有 2 張標記為「5 點」，另外 3 張標記為「4 點」，今從袋中隨機取出 2 張紙牌，若 2 張紙牌點數不同，則結束取牌；若 2 張紙牌點數相同，則將紙牌放回，並繼續取牌，直到 2 張紙牌點數不同，則結束取牌。試問取出紙牌之點數總和的期望值為________。

5. 平面上，有一個四邊形 $ABCD$ 內接於圓 Γ ，$\overline{AC}$ 為圓 Γ 的直徑、O 點為圓 Γ 的圓心。已知 $\overline{AB}=4\sqrt{5}$,
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=11$ 且 ΔOAB的面積:ΔOAD的面積$=16:7$ ，設 $\overrightarrow{AC}=r\overrightarrow{AB}+s\overrightarrow{AD}$ ，求數對$(r,s)=$________。

6. 空間中，有一個邊長為 3 的正立方體，此正立方體在某平面 E 的投影為正六邊形，求此正六邊形的面積為________。

7. 求滿足$(a+bi)^{2002}=a-bi$ 的實數數對(a,b)有________組。

8. 已知 $f(x)=x^2+6x+1$，令符合兩條件 $f(x)+f(y)\le 0$ 與 $f(x)-f(y)\le 0$ 之點(x,y)所成的集合為R ，則區域 R 的面積為________。

9. ΔABC 中，角 A,B,C 所對的邊分別為 a,b,c, 其中 $b\ge a$ ，若 $2a\cos(B+C)+c\cos B+b\cos C=0$ ，且 ΔABC 外接圓半徑為 2，求 $2b-c$ 取值範圍為________。

10. 計算 $\sum_{k=1}^{2025}\frac{2^{-k}+1}{2^{-2k}-2^{-k+1}+2^{k+1}-1}=$________。

二、計算證明題：每題 10 分，共 5 題，合計 50 分

A. 設 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2-x)(x+x^{2n})}{1+x^{2n}}$ ，求$\int_0^2 f(x)\,dx=?$

B. 設A、B、C是橢圓$\Gamma:\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{32}=1$上三點，且$\Delta ABC$的重心恰為此橢圓的中心，已知$A(\sqrt{6}+\sqrt{2},\ 2\sqrt{3}-2)$，

求ΔABC的面積為何?

C. 坐標平面上，若四邊形的四個頂點都在函數$f(x)$上，則稱此四邊形為$f(x)$的內接四邊形。已知函數

$f(x)=x^3+ax$的圖形有唯一一個內接正方形，求a之值為何?

D. 已知一銳角三角形△ABC之邊長分別為a,b,c。

令r為△ABC內切圓之半徑，R為△ABC外接圓之半徑，

試證：(1) $r=4R\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}$ (5 分)

(2) $\dfrac{abc}{\sqrt{2(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)}}\ge\dfrac{r}{2R}$ (5 分)

E. 用$|S|$表示集合S中元素的個數。已知集合$S=\left\{\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{4},\cdots,\dfrac{1}{113}\right\}$，$T=\left\{A\subseteq S \,\middle|\, |A|=2n, n\in N\right\}$，試回答下列問題:

(1) $|T|=?$

(2) $\forall A_i\in T$，將A_i中所有的元素相乘的乘積記為m_i，再將所有的m_i相加，其和為M，求M之值?

,

答　案　公　佈　表

臺中市立臺中第二高級中等學校

114 學年度　　第 1 次教師甄選　　數學科　試題　　答案更正

一、填充題：每格 5 分，共 10 格，合計 50 分

1	2	3	4	5
$\sqrt{10}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{27}{495}$	$\frac{44}{3}$	$(\frac{35}{46},\frac{40}{23})$
6	7	8	9	10
$9\sqrt{3}$	2004	8π	$[2\sqrt{3},4\sqrt{3})$	$\frac{2^{2026}-2}{2^{2026}-1}$

二、計算證明題：每題 10 分，共 5 題，合計 50 分

A. $\frac{7}{6}$

B. $12\sqrt{6}$

C. $-2\sqrt{2}$

D. 略

E. (1) $2^{111}-1$　(2) $\frac{3108}{113}$

附註：1.本表請隨同試題、***命題袋*** 一併繳送教務處。

2.命題教師：　　　　　　簽章

年　　　月　　　日