國立臺灣師範大學附屬高級中學 114 學年度第 1 次專任教師甄選數學科筆試〔題目卷〕

一、選填題：（每題 5 分，共 80 分。填在答案卡上，分數或根式須以最簡形式回答，否則不予計分）

A. 若同時投擲三個公正的骰子一次，則三個骰子中，出現有兩個骰子點數和為 7 或三個骰子點數和為 7 的機率為 $\frac{①②}{③④}$。

$\frac{35}{72}$

x	y	z		x	y	z		x	y	z	
6	1	1 → 3		5	2		→ 30	5	1	1	3
		6 → 3		4	3		→ 30	4	2	1	6
		2, 3, 4, 5 → 6·4	30					3	3	1	3
								3	2	2	3

$\frac{105}{216}=\frac{35}{72}$

B. 設 T 為平面線性變換矩陣，T 將點 $(1,-1)$ 變換為點 $(2,0)$，並將點 $(3,1)$ 變換為點 $(6,4)$。現將點 $P(2,-2025)$ 連續使用 T 變換 n 次後為 Q 點，若 Q 點在第一象限，則 n 的最小自然數為 ⑤⑥。

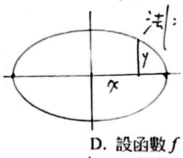
10

$\begin{bmatrix}2&6\\0&4\end{bmatrix}=T\begin{bmatrix}1&3\\-1&1\end{bmatrix}\Rightarrow T=\frac{2}{4}\begin{bmatrix}1&3\\0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-3\\1&1\end{bmatrix}\Rightarrow\underset{T}{\begin{bmatrix}2&0\\1&1\end{bmatrix}}\underset{X_0}{\begin{bmatrix}2\\-2025\end{bmatrix}}\ \underset{X_1}{\begin{bmatrix}4\\2-2025\end{bmatrix}}\to\underset{X_2}{\begin{bmatrix}8\\4+2-2025\end{bmatrix}}\Rightarrow y_n=\frac{2\cdot(2^n-1)}{2-1}-2025>0$

$\Rightarrow 2^{n+1}>2027\Rightarrow n=10$

C. 如右圖，坐標空間中，有一個實心體 Ω，其底部為在 xy 平面上的橢圓區域 $\Gamma:\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}\le 1$，若用垂直 x 軸於點 $(x,0,0)$ 的平面 E_x 對 Ω 所作的截面都是正方形，則 Ω 的體積為 ⑦⑧。

64

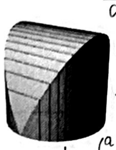


法1：$y^2=\frac{1}{9}(36-4x^2)$

$(\text{邊長})^2=(2y)^2=\frac{4\times4}{9}(9-x^2)$

$V=\frac{4\times4}{9}\times2\int_0^3(9-x^2)dx=\frac{4\cdot4\cdot2}{9}\cdot(27-9)=64$

法2 $\frac{\square}{\bigcirc}=\frac{4}{\pi}$，$\frac{4}{3}\pi ab^2\cdot\frac{4}{\pi}=64$



$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 旋轉体体積

$2\pi\int_0^a\left(b^2-\frac{b^2}{a^2}x^2\right)dx=\frac{4}{3}\pi ab^2$

D. 設函數 $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$，滿足 $f(1-\frac{1}{1+t})+f(1+\frac{1}{t})\log_2(1+t)=f(\frac{1+t}{t})\log_2 t+2025$，$\forall t>0$，則 $f(128)$ 的值為 ________。

324

$f(\frac{t}{t+1})=f(\frac{t+1}{t})\log_2(\frac{t}{t+1})+2025\Rightarrow f(x)=\left(f(x)(-\log_2 x)+2025\right)\log_2 x+2025$

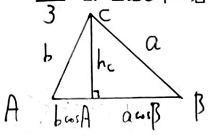
$f(x)=f(\frac{1}{x})\log_2 x+2025$

$f(\frac{1}{x})=f(x)\log_2(\frac{1}{x})+2025$

$\Rightarrow f(x)\cdot(1+(\log_2 x)^2)=2025(1+\log_2 x)\Rightarrow f(128)=\frac{2025\cdot\cancel{8}^{4}}{\cancel{50}25}=324$

E. ΔABC 中，若 $\tan A\tan B=\tan B\tan C+\tan C\tan A$，則 $\cos C$ 的最小值為 $\frac{⑫}{⑬}$。

$\frac{2}{3}$



$\frac{1}{\tan A}+\frac{1}{\tan B}=\frac{1}{\tan C}$，$b\times h_b=c\times h_c$

$\Rightarrow\frac{c}{h_c}=\frac{a\cos C}{h_b}=\frac{ab\cos C}{ch_c}$

$ab\cos C=c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

$\Rightarrow\cos C=\frac{a^2+b^2}{3ab}\ge\frac{2}{3}$

$\frac{2}{3}Ah$（公式）$=\frac{2}{3}(2b)^2(2a)=\frac{16}{3}ab^2=64$

F. 已知 $\tan\alpha$、$\tan\beta$ 為實係數方程式 $x^2+(3p-1)x+9p^2=0$ 的兩實根，且 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\tan^k(\alpha+\beta)$ 不存在，若可能的實數 p 值之最大範圍為 $a\le p\le b$，則 $a+b$ 的值為 $\frac{⑭⑮}{⑯}$。

$-\frac{1}{3}+0=-\frac{1}{3}$

$\tan(\alpha+\beta)=\frac{1-3p}{1-9p^2}=\frac{1}{3p+1}$

$\begin{cases}D\ge0\\ \left|\frac{1}{3p+1}\right|\ge1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(3p-1)^2\ge(6p)^2\\ |3p+1|\le1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(9p-1)(3p+1)\le0\\ -1\le3p+1\le1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-\frac{1}{3}\le p\le\frac{1}{9}\\ -\frac{2}{3}\le p\le0\end{cases}\Rightarrow-\frac{1}{3}\le p\le0$

G. 坐標空間中，已知直線 $L:\frac{x-a}{5}=\frac{y+11}{c}=\frac{z-b}{d}$ 為兩直線 $L_1:\frac{x-1}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{2}$ 與 $L_2:\frac{x+1}{4}=\frac{y-6}{-7}=\frac{z-6}{-4}$ 的鈍交角平分線，其中 $a,b,c,d\in\mathbb{R}$，則 $a+b+c+d$ 的值為 ⑰⑱。

$-2-23+10+25=10$

令 L_1,L_2 交點 $P(2t+1,-t,2t)-L_1$　　$Q(a,-11,b)$

$\Rightarrow\frac{2t+2}{4}=\frac{-t-6}{-7}=\frac{2t-6}{-4}\Rightarrow t=1\Rightarrow P(3,-1,2)$

$\overrightarrow{V_1}\cdot\overrightarrow{V_2}>0$

$\frac{|\overrightarrow{V_1}|}{|\overrightarrow{V_2}|}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$

$\Rightarrow\overrightarrow{V}\,/\!/\,3\overrightarrow{V_1}-\overrightarrow{V_2}=(2,4,10)\,/\!/\,(1,2,5)$

$\Rightarrow c=10$，$d=25$

$\frac{a-3}{1}=\frac{-10}{2}=\frac{b-2}{5}\Rightarrow a=-2,\ b=-23$

N. 設 $x,y,z\in\mathbb{R}$，已知 $x+y+z=0$，$x^2+y^2+z^2=6$，若 $x^3+y^3+z^3$ 的最大值為 M，最小值為 m，則 $M\times m$ 的值為 ㉞㉟㊱。

$6\times(-6)=-36$

$0=6+2\underset{-3}{\boxed{(xy+yz+zx)}}$

x,y,z 為 $\boxed{t^3-3t}-xyz=0$ 之3根

令 $f(t)=t^3-3t$

$f'(t)=0\Rightarrow t=1$ or -1

$x^3+y^3+z^3=3xyz$

$\Rightarrow -6\le 3xyz\le 6$

$\Rightarrow -36$

O. 設 $(1+2\sqrt{2}+3\sqrt{3})^n=a_n+b_n\sqrt{2}+c_n\sqrt{3}+d_n\sqrt{6}$，其中 $n,a_n,b_n,c_n,d_n\in\mathbb{N}$，則 $\lim_{n\to\infty}\frac{c_n\times d_n}{a_n\times b_n}$ 的值為 $\frac{㊲}{㊳}$。

$\frac{1}{3}$

$p^n=(1+2\sqrt{2}+3\sqrt{3})^n$

$q^n=(1-2\sqrt{2}+3\sqrt{3})^n$

$r^n=(1+2\sqrt{2}-3\sqrt{3})^n$

$s^n=(1-2\sqrt{2}-3\sqrt{3})^n$

$\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}(p^n+q^n-r^n-s^n)/p^n\cdot\frac{1}{\sqrt{6}}(p^n-q^n-r^n+s^n)/p^n}{(p^n+q^n+r^n+s^n)/p^n\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(p^n-q^n+r^n-s^n)/p^n}\to\frac{1}{3}$

P. 已知 $\log2\approx0.3010$，$\log3\approx0.4771$，$\log7\approx0.8451$，設 $N=\sum_{k=0}^{38}(C_{3k}^{116}-C_{3k}^{115}+C_{3k}^{114})$，若 N 的整數部分為 a 位數，N 的最高位數字為 b，則數對 $(a,b)=($㊴㊵$,$㊶$)$。

$(35,2)$

令 $f(x)=(1+x)^n=\sum_{k=0}^{n}C_k^n x^k$

$\sum_{k=0}^{[\frac{n}{3}]}C_{3k}^n=\frac{1}{3}(f(1)+f(\omega)+f(\omega^2))$

$\frac{1}{3}\left(\begin{array}{l}2^{116}+(1+\omega)^{116}+(1+\omega^2)^{116}\\-(2^{115}+(1+\omega)^{115}+(1+\omega^2)^{115}\\+2^{114}+(1+\omega)^{114}+(1+\omega^2)^{114}\end{array}\right)$

$(-\omega^2)^2-(-\omega^2)^1+(-\omega)^3=\omega+\omega^2+1$

$(-\omega)^2-(-\omega)^1+(-\omega)^3=\omega^2+\omega+1$

$\frac{1}{3}2^{114}(4-2+1)=2^{114}$

$\log2^{114}\doteqdot114\times0.301=34+0.314=\log(10^{34}\times(2.\sim))$

二、非選題：（共 20 分。請用黑色或藍色原子筆寫在作答卷上，須詳細過程，否則酌予扣分）

H. 坐標平面上，設通過點 $P(k\,,\,6)$ 恰可作 3 條相異直線與 $y=f(x)=x^3-x$ 的圖形相切，若可能的實數 k 值之最大範圍為 $k<a\vee k>b$，則 $a\times b$ 的值為⑲⑳㉑。

$-6\times2=-12$

設切點 $P(t,t^3-t)$

$m=3t^2-1=\dfrac{t^3-t-6}{t-k}$

令 $f(t)=2t^3-3kt^2+k+6$

$f'(t)=6t^2-6kt=6t(t-k)=0$

$f(0)\,f(k)<0 \Rightarrow (k+6)(k^3-k-6)>0$

$$\begin{array}{r|l} & 1\ \ +0\ \ -1\ \ -6 \quad 2 \\ + & \quad\ \ +2\ \ +4\ \ +6 \\ \hline & 1\ \ +2\ \ +3\ \ +0 \end{array}$$

$\Rightarrow (k+6)(k-2)\underbrace{(k^2+2k+3)}_{D<0}>0$

$\Rightarrow k>2$ or $k<-6 \Rightarrow -12$

I. 有紅、黃、藍三種顏色的球，每種球皆有九顆，若將取出來的球排成一列，規定只有黃球和黃球不能相鄰，則排出一列共九顆球的排法共有㉒㉓㉔㉕種。

9136

Y	0	1	2		5
R	0 1 ⋯ 9	0 1 2 ⋯ 8	0 1 ⋯ 7	⋯	0 1 ⋯ 4
B	9 8 ⋯ 0	8 7 6 ⋯ 0	7 6 ⋯ 0		4 3 ⋯ 0
	$C^9_0+C^9_1+\cdots+C^9_9=2^9$	$C^8_0+\cdots+C^8_8=2^8$	2^7		2^4

$2^9+2^8\cdot C^9_1+2^7\cdot C^8_2+2^6\cdot C^7_3+2^5\cdot C^6_4+2^4\cdot C^5_5$

$=512+2304+3584+2240+480+16$

$=9136$

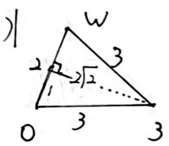
J. 設 ω 是五次複係數方程式 $x^5-3x^4-c=0$ 的虛根，已知 $|c|=48$ 且 $|\omega|=2$，若 $\omega=\dfrac{\alpha\pm\sqrt{\beta}i}{\gamma}$，其中 $\alpha\,,\,\beta\,,\,\gamma\in\mathbb{N}$，且 $\alpha\,,\,\gamma$ 互質，$i=\sqrt{-1}$，則 $\alpha+\beta+\gamma$ 的值為㉖㉗。

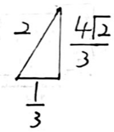
$2+32+3$

$=37$

$|c|=|w^4||(w-3)|$

$\Rightarrow |w-3|=3$





$\Rightarrow \dfrac{2\pm\sqrt{32}i}{3}$

K. 設 $f(x)$ 為二次實係數多項式，滿足 $x\,f(x)=4x^3+2x^2\int_1^2 f(t)dt+\int_1^x f(t)dt$，則 $f(-1)$ 的值為㉘㉙。

$6(-1)^2-16(-1)+6$

$=28$

令 $A=\int_1^2 f(t)dt$

$f(x)+xf'(x)=12x^2+4Ax+f(x)$

$\Rightarrow f'(x)=12x+4A$

$\Rightarrow f(x)=6x^2+4Ax+c$

$f(1)=6+4A+C=4+2A$

$A=\int_1^2(6x^2+4Ax+C)dx$

$=2\times7+2A\times3+C$

$\begin{cases}2A+C=-2\\5A+C=-14\end{cases}$

$\Rightarrow A=-4,\ C=6$

$\Rightarrow f(-1)=6-16(-1)+6=32$

L. 已知方程式 $\sqrt{1-x}=2x^2-1+2x\sqrt{1-x^2}$ 的正實數解為 t，將 t^2 的值用四捨五入法取至小數點後第二位，則 $t^2\approx0.$㉚㉛。

$\dfrac{5-\sqrt5}{8}$

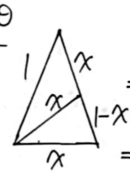
$\doteqdot0.35$

$\sqrt{1-\sin\theta}=-\cos2\theta+\sin2\theta$

$\Rightarrow 1-\sin\theta=1-\sin4\theta$, or $\theta=\pi-4\theta$

$\Rightarrow \theta=4\theta$(不合)

$\Rightarrow \theta=36^\circ$



$\dfrac{1}{x}=\dfrac{x}{1-x}$

$\Rightarrow x^2+x-1=0$

$\Rightarrow x=\dfrac{-1+\sqrt5}{2}$

$\sin^2 36^\circ=\dfrac{1-\cos72^\circ}{2}\leftarrow\dfrac{-1+\sqrt5}{4}$

$=\dfrac{5-\sqrt5}{8}$

M. 定義符號：$\prod\limits_{k=1}^{n}a_k=a_1\times a_2\times a_3\times\cdots\times a_n$。設 $b_1\,,b_2\,,b_3\,,\cdots,b_n$ 為 n 個皆大於1的相異正整數，若 $\prod\limits_{k=1}^{n}(1-\dfrac{1}{b_k})=\dfrac{114}{2025}$，則 n 的最小正整數值為㉜㉝。

17

the piano

連乘之分數需為分子比分母小1的正真分數

$\min=\dfrac12\cdot\dfrac23\cdots\dfrac{n}{n+1}=\dfrac{1}{n+1}\leq\dfrac{38}{675}=\dfrac{2\times19}{3^3\times5^2}$

$\Rightarrow 38n\geq637\Rightarrow n\geq16.\sim\Rightarrow17$

考慮 $\dfrac12\cdot\dfrac23\cdot\dfrac34\cdots\dfrac{15}{16}\cdot\dfrac{16}{17}\cdot\dfrac{17}{18}\cdot\dfrac{18}{19}\cdot\dfrac{19}{20}$

分子有19，拿掉 $\dfrac{18}{19}\Rightarrow$ 分母多了 $\underset{18}{3^2\times2}$，$\underset{20}{2^2\times5}$

分母要再多 $3\times5\Rightarrow$ 拿掉 $\dfrac{15}{16}$ 分子多了 $16=2^4$

約分後 $\dfrac{16}{2^3}=2$，故 $\min=17$