臺北市立建國高級中學 114 學年度第 1 次正式教師甄選 數學科題目卷

一、填充題（每題 6 分，共計 72 分）

1. $\triangle ABC$ 中，已知 $\tan A=\dfrac{4}{3}$，D 為 $\overline{BC}$ 上一點，$\overline{AD}=3\sqrt{2}$, $\angle BAD=45^\circ$，則 $\triangle ABC$ 面積的最小值為 ________。

2. $\triangle OAB$ 中，已知 $\overline{OA}=\sqrt{7}$, $\overline{OB}=\sqrt{13}$, $\overline{AB}=\sqrt{10}$，C 為 $\overline{AB}$ 中點，D 為 $\overline{OC}$ 中點。過 D 點作直線 OA 的垂線分別與 $\overline{OA}$、$\overline{OB}$ 交於 P、Q 兩點。設 $\overrightarrow{OP}=m\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OQ}=n\overrightarrow{OB}$，其中 m,n 為實數，則數對 $(m,n)=$ ________。

3. 在邊長為 1 的正四面體 $ABCD$ 中，若點 E 在 $\overline{BC}$ 上且 $\dfrac{\overline{BE}}{\overline{EC}}=\dfrac{1}{2}$，則直線 AE 與直線 CD 的距離為 ________。

4. 已知橢圓 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）和函數圖形 $y=\dfrac{1}{x}$ 在第一象限有唯一一個交點 P。令橢圓 C 的兩焦點為 F_1、F_2，且 S 為 ΔPF_1F_2 的面積，則 $\lim\limits_{a\to\infty}S=$ ________。

5. 投擲 5 個公正骰子，則其中存在 2 個骰子的點數和為 10 的機率為 ________。（已知 $6^5=7776$，$5^5=3125$）

6. 已知 A 為二階方陣，滿足 $(A+I)^2=O$ 且 $A\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\-2\end{bmatrix}$，其中 I 為二階單位矩陣，O 為二階零矩陣，則 $A^{100}=$ ____。

7. 設 $f(\theta)=\dfrac{7+\cos 2\theta}{3+\sin\theta}$，其中 θ 為實數，$\theta\in[0,2\pi]$。令 $f(\theta)$ 的最大值為 M，最小值為 m，則數對 $(M,m)=$ ______。

8. 設 b,c 皆為整數且 c 小於 10。已知有兩個實數 x 滿足方程式 $4^x-b\cdot 2^x+c=0$，而這兩個實數其中一個是正實數，另一個是大於 -1 的負實數，則滿足題目條件的數對 (b,c) 有 ________ 組解。

9. 已知 $x=x_1+x_2i$, $y=y_1+y_2i$, $z=z_1+z_2i$，其中 x_1,x_2,y_1,y_2,z_1,z_2 為實數。若 $|x|=|y|=|z|$, $x+y+z=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\sqrt{5}i$, $xyz=\sqrt{3}+\sqrt{5}i$，則 $x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=$ ________。

10. 已知 n 是不小於 4 的正整數。投擲一個公正的骰子 n 次，每次投擲的結果互不影響。設 a_i 為第 i 次出現的點數，$i=1,2,\cdots,n$，$K_n=|1-a_1|+|a_1-a_2|+\cdots+|a_{n-1}-a_n|+|a_n-6|$, $L_n=K_n+|a_4-4|$，r_n 是 L_n 的所有可能值中的最小值，則 $L_n=r_n$ 的機率 $p_n=$ ________。（以 n 表示）

11. 設實數 $x_1,x_2,\cdots,x_{25}$ 滿足 $\sum\limits_{k=1}^{25}x_k=0$ 與 $\sum\limits_{k=1}^{25}x_k^2=1$，則 $\sum\limits_{k=1}^{25}|x_k|$ 的最大值為 ________。

12. 設 x,y 為實數，已知所有滿足 $25\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}=|3x+4y|$ 的點 (x,y) 所形成的圖形是橢圓，則此橢圓的正焦弦長為 ________。

二、計算題（各題配分列於題後，全部 2 大題，共計 28 分）

1. 已知數列$<a_n>$的首項$a_1=\frac{1}{4}$，且對於所有的正整數n滿足$a_{n+1}=\frac{5}{8}-\frac{1}{2}(a_n)^2$；

數列$<b_n>$對於所有的正整數n滿足$b_n=\frac{1}{2}(a_{n+1}+a_n)$。請回答下列各小題：

(1) 證明：$a_{n+2}-a_{n+1}=-b_n(a_{n+1}-a_n)$對所有的正整數$n$都成立。 (3 分)

(2) 證明：$0<a_n<\frac{5}{8}$對所有的正整數n都成立。 (4 分)

(3) 證明：$|a_n-\frac{1}{2}|\le|a_{n+1}-a_n|$對所有的正整數$n$都成立。 (3 分)

(4) 判斷無窮數列$<a_n>$為收斂或發散數列；若為收斂數列，求其極限值。 (4 分)

2. 對於函數$f(x)$，若$f(x)=x$，則稱x為$f(x)$的不動點；若$f(f(x))=x$，則稱x為$f(x)$的穩定點。將函數$f(x)$的不動點和穩定點的集合分別記為A和B，即$A=\{x\mid f(x)=x\},\ B=\{x\mid f(f(x))=x\}$。請回答下列各小題：

(1) 求證：$A\subset B$。 (4 分)

(2) 若$f(x)=ax^2+1$，其中$a\in R,\ x\in R$，且A和B為二個相等之非空集合，求實數a值的範圍。 (10 分)

臺北市立建國高級中學 114 學年度第 1 次正式教師甄選 數學科簡答

一、填充題（每題 6 分，共計 72 分）

題號	1	2	3	4
答案	$\frac{9}{2}$	$(\frac{3}{7},\frac{3}{5})$	$\frac{2\sqrt{6}}{9}$	$\sqrt{2}$
題號	5	6	7	8
答案	$\frac{53}{108}$	$\begin{bmatrix} -49 & -50 \\ 50 & 51 \end{bmatrix}$	$(12-4\sqrt{5},\ \frac{3}{2})$	36
題號	9	10	11	12
答案	$\frac{\sqrt{15}}{4}$	$\frac{10(n-2)(n-3)}{6^n}$	$\frac{4}{5}\sqrt{39}$	$\frac{4}{5}$

二、計算題（各題配分列於題後，全部 2 大題，共計 28 分）

題號	1			
	(1)	(2)	(3)	(4)
答案	略	略	略	$\frac{1}{2}$

題號	2	
	(1)	(2)
答案	略	$\left[-\frac{3}{4},\frac{1}{4}\right]$