國立新竹高級中學 114 學年度第 1 學期第 1 次教師甄選數學科試題

一、填充題Ⅰ (每題 5 分，共 25 分)

1. 若 $2\sin 22.5^\circ = \sqrt{a} - \sqrt{b}$，其中 $a,b>0$ 且 $a+b$ 及 ab 皆為有理數，求

   $\left[a^5\right]=$__________。　　（註：$[\ \ ]$為高斯符號）

2. 求聯立方程組 $\begin{cases} 9x+11y+13z=417 \\ 13x+17y+11z=13^2+17^2+11^2 \\ 43x+47y+41z=43\cdot 13+47\cdot 17+41\cdot 11 \end{cases}$ 的解 $(x,y,z)=$__________。

3. 已知無窮級數 $\dfrac{1}{1^2}+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2}+\cdots=\dfrac{\pi^2}{6}$，求無窮級數

   $\dfrac{1}{1^2\times 2}+\dfrac{1}{2^2\times 3}+\dfrac{1}{3^2\times 4}+\cdots+\dfrac{1}{n^2(n+1)}+\cdots$ 的和為__________。

4. 求 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\dfrac{\pi\cos\frac{k\pi}{6n}}{n(1+\sin\frac{k\pi}{6n})}$ 的值為＿＿＿＿＿＿＿。

5. 設 $F(x)=\int_{0.1}^{x^3}\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt$ ，求 $F'(\frac{1}{2})=$＿＿＿＿＿＿＿。

二、填充題Ⅱ (每題 6 分，共 48 分)

6. 設$\Gamma: x^2+4y^2-6x+5=0$，已知Γ的圖形經矩陣$A=\begin{bmatrix}1 & a\\ -a & 1\end{bmatrix}$變換後與$y$軸相切，求$a$值為__________。(有兩解)

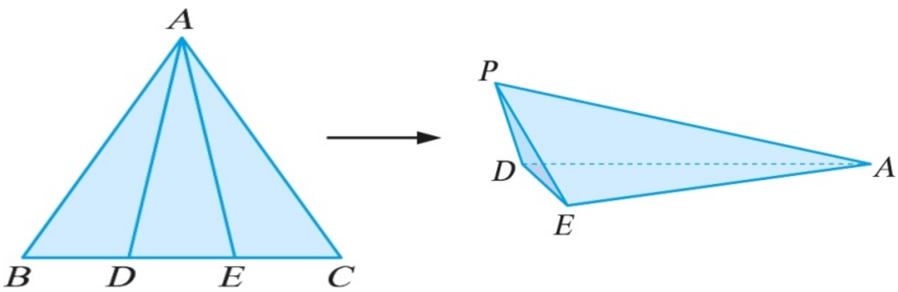
7. 已知有一個四面體$ABC-D$，其中三側面與底面ABC的夾角皆為$\frac{\pi}{6}$，而底面ΔABC中，$\angle A=\frac{\pi}{3}$，且最大邊長與最小邊長是$3x^2-24x+28=0$的兩根，求四面體$ABC-D$的體積為__________。

8. 空間坐標中，平面E：$3y+4z=0$上有一橢圓Γ，其中心為$O(0,0,0)$，一頂點為$A(2\sqrt{5},0,0)$，一焦點為$F(\sqrt{15},0,0)$，在橢圓Γ有一點P滿足$\angle AOP=45^\circ$，求P點坐標為__________。(有兩解)

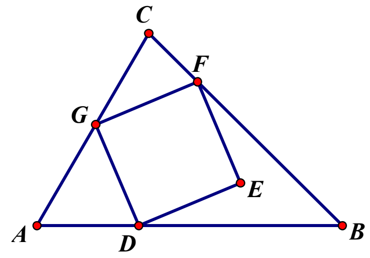
9. 已知 $x \in R$，若 $1+\dfrac{3(\sqrt{3}+1)}{2}\cos x+\dfrac{3(\sqrt{3}-1)}{2}\sin x-\cos 3x-\sin 3x$ 的最大值為 M，求 M 之值為__________。

10. 令 $\cos\dfrac{\pi}{180}=a$，已知 $\displaystyle\sum_{k=0}^{360}(C_k^{360}\cdot\cos\frac{k\pi}{180})$ 之值可表示為 $-(p+qa)^n$，其中 n 為正整數，p、q 為正的有理數，求數組 $(p,q,n)=$__________。

11. 有一等腰三角形 ABC 的紙張，其三邊長為 $\overline{AB}=\overline{AC}=4$、$\overline{BC}=6$，設 D、E 是 $\overline{BC}$ 的三等分點，如下圖所示。今沿著摺線 $\overline{AD}$、$\overline{AE}$ 摺起，使得 B、C 兩點重合，令此重合點為 P 點。設 θ 是側面 PAE 與底面 DAE 兩平面之夾角，求 $\sin\theta$ 的值為__________。



12. 如圖所示，正方形 $DEFG$ 的三頂點 D、F、G 分別落在 ΔABC 的三邊 AB、BC、CA 上，已知 $\angle A=60^\circ$、$\angle B=45^\circ$、$\overline{AB}=6$、$\overline{AD}=2$，求正方形 $DEFG$ 的面積為__________。



13. 設一箱中有 20 顆球，其中紅球有 10 顆，黃球有 10 顆，今一次取一球，取後不放回，直到取到第 10 顆紅球就停止，以隨機變數 X 表示取到第 10 顆紅球停止時的次數，X=10,11,12,...,20，求隨機變數 X 的期望值 $E(X)=$__________。

三、計算證明題(每題 9 分，共 27 分，請詳列計算與證明過程。)

1. 在直角坐標空間中，設 $O(0,0,0)$ ，給定 $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ 且 $\overrightarrow{n}=(a,b,c)\neq\overrightarrow{0}$ 。

令函數 $F(x,y,z)=ax+by+cz+d$ 。

(1)若單位向量 $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{OV}=(v_1,v_2,v_3)$ 滿足下述性質：

「若 $t>0$ ，則 $F(x+tv_1,y+tv_2,z+tv_3)\geq F(x,y,z)$ 恆成立」，求所有 $\overline{OV}$ 所形成的立體的體積。(3 分)

(2)若單位向量 $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{OV}=(v_1,v_2,v_3)$ 滿足下述性質：

「若 $t>0$，則 $F(x+tv_1,y+tv_2,z+tv_3)\geq F(x,y,z)+\dfrac{t}{3}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ 恆成立」，求所有 $\overline{OV}$ 所形成的立體的體積。(6 分)

2. 已知甲班有 m 個人，乙班有 n 個人。給定正整數 $r \le \min\{m,n\}$，今由兩班 $m+n$ 人中隨機選出 r 個人，每人被選到的機會均等。

令隨機變數 X 表示選出的 r 個人中屬於甲班的人數，$X = 0,1,2,...,r$ ，證明 $P(X=k)$ 的最大值僅發生在 $k = \left[\dfrac{(m+1)(r+1)}{m+n+2}\right]$時。　　（註：[ ]為高斯符號）　(9 分)

3. 設 $f(x) = x^2 + 3x - 4$ ，無窮數列$\langle a_n \rangle$滿足 $a_1 = 0$ ，且當 $n \ge 1$時，a_{n+1}為滿足不等式 $f(x) \le a_n$之 x 的最大值。

(1)求 a_2 的值？(1 分)

(2)證明：數列$\langle a_n \rangle$收斂，並求出其極限值。(8 分)