

一、填充題 I (每題 5 分，共 25 分)

1. 若  $2\sin 22.5^\circ = \sqrt{a} - \sqrt{b}$ ，其中  $a, b > 0$  且  $a+b$  及  $ab$  皆為有理數，求

$[a^5] = \underline{\hspace{2cm}}$ 。 (註： $[ \ ]$  為高斯符號)

2. 求聯立方程組 
$$\begin{cases} 9x + 11y + 13z = 417 \\ 13x + 17y + 11z = 13^2 + 17^2 + 11^2 \\ 43x + 47y + 41z = 43 \cdot 13 + 47 \cdot 17 + 41 \cdot 11 \end{cases}$$
 的解  $(x, y, z) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

3. 已知無窮級數  $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$ ，求無窮級數

$\frac{1}{1^2 \times 2} + \frac{1}{2^2 \times 3} + \frac{1}{3^2 \times 4} + \cdots + \frac{1}{n^2(n+1)} + \cdots$  的和為  $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

4. 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{\pi \cos \frac{k\pi}{6n}}{n(1 + \sin \frac{k\pi}{6n})}$  的值为\_\_\_\_\_。

5. 設  $F(x) = \int_{0.1}^{x^3} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt$ ，求  $F'(\frac{1}{2}) =$ \_\_\_\_\_。

二、填充題 II (每題 6 分，共 48 分)

6. 設  $\Gamma: x^2 + 4y^2 - 6x + 5 = 0$ ，已知  $\Gamma$  的圖形經矩陣  $A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ -a & 1 \end{bmatrix}$  變換後與  $y$  軸相切，

求  $a$  值為\_\_\_\_\_。(有兩解)

7. 已知有一個四面體  $ABC-D$ ，其中三側面與底面  $ABC$  的夾角皆為  $\frac{\pi}{6}$ ，而底面  $\triangle ABC$

中， $\angle A = \frac{\pi}{3}$ ，且最大邊長與最小邊長是  $3x^2 - 24x + 28 = 0$  的兩根，求四面體

$ABC-D$  的體積為\_\_\_\_\_。

8. 空間坐標中，平面  $E: 3y + 4z = 0$  上有一橢圓  $\Gamma$ ，其中心為  $O(0,0,0)$ ，一頂點為

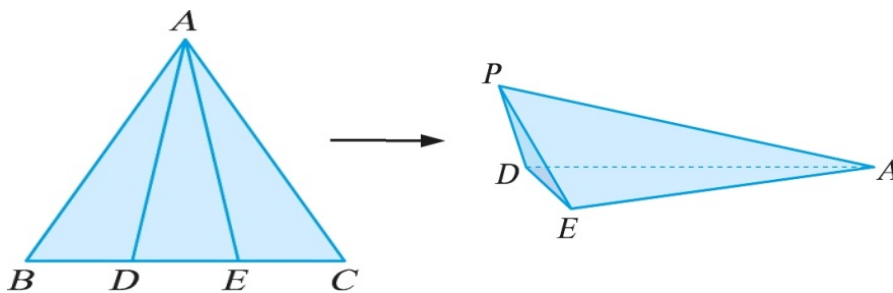
$A(2\sqrt{5}, 0, 0)$ ，一焦點為  $F(\sqrt{15}, 0, 0)$ ，在橢圓  $\Gamma$  有一點  $P$  滿足  $\angle AOP = 45^\circ$ ，求  $P$

點坐標為\_\_\_\_\_。(有兩解)

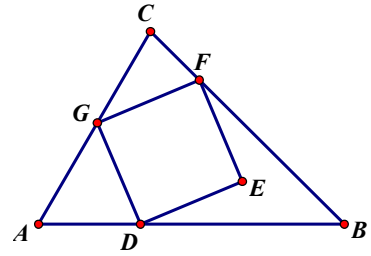
9. 已知  $x \in R$ ，若  $1 + \frac{3(\sqrt{3}+1)}{2} \cos x + \frac{3(\sqrt{3}-1)}{2} \sin x - \cos 3x - \sin 3x$  的最大值為  $M$ ，求  $M$  之值為\_\_\_\_\_。

10. 令  $\cos \frac{\pi}{180} = a$ ，已知  $\sum_{k=0}^{360} (C_k^{360} \cdot \cos \frac{k\pi}{180})$  之值可表示為  $-(p+qa)^n$ ，其中  $n$  為正整數， $p、q$  為正的有理數，求數組  $(p, q, n) =$ \_\_\_\_\_。

11. 有一等腰三角形  $ABC$  的紙張，其三邊長為  $\overline{AB} = \overline{AC} = 4$ 、 $\overline{BC} = 6$ ，設  $D、E$  是  $\overline{BC}$  的三等分點，如下圖所示。今沿著摺線  $\overline{AD}$ 、 $\overline{AE}$  摺起，使得  $B、C$  兩點重合，令此重合點為  $P$  點。設  $\theta$  是側面  $PAE$  與底面  $DAE$  兩平面之夾角，求  $\sin \theta$  的值為\_\_\_\_\_。



12. 如圖所示，正方形  $DEFG$  的三頂點  $D$ 、 $F$ 、 $G$  分別落在  $\triangle ABC$  的三邊  $AB$ 、 $BC$ 、 $CA$  上，已知  $\angle A = 60^\circ$ 、 $\angle B = 45^\circ$ 、 $\overline{AB} = 6$ 、 $\overline{AD} = 2$ ，求正方形  $DEFG$  的面積為 \_\_\_\_\_。



13. 設一箱中有 20 顆球，其中紅球有 10 顆，黃球有 10 顆，今一次取一球，取後不放回，直到取到第 10 顆紅球就停止，以隨機變數  $X$  表示取到第 10 顆紅球停止時的次數， $X=10,11,12,\dots,20$ ，求隨機變數  $X$  的期望值  $E(X) =$  \_\_\_\_\_。

三、計算證明題(每題 9 分，共 27 分，請詳列計算與證明過程。)

1. 在直角坐標空間中，設  $O(0,0,0)$ ，給定  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  且  $\vec{n} = (a, b, c) \neq \vec{0}$ 。

令函數  $F(x, y, z) = ax + by + cz + d$ 。

(1) 若單位向量  $\vec{v} = \overrightarrow{OV} = (v_1, v_2, v_3)$  滿足下述性質：

「若  $t > 0$ ，則  $F(x + tv_1, y + tv_2, z + tv_3) \geq F(x, y, z)$  恆成立」，求所有  $\overrightarrow{OV}$  所形成的立體的體積。(3 分)

(2) 若單位向量  $\vec{v} = \overrightarrow{OV} = (v_1, v_2, v_3)$  滿足下述性質：

「若  $t > 0$ ，則  $F(x + tv_1, y + tv_2, z + tv_3) \geq F(x, y, z) + \frac{t}{3}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$  恆成立」，求所有  $\overrightarrow{OV}$  所形成的立體的體積。(6 分)

2. 已知甲班有  $m$  個人，乙班有  $n$  個人。給定正整數  $r \leq \min\{m, n\}$ ，今由兩班  $m+n$  人中隨機選出  $r$  個人，每人被選到的機會均等。

令隨機變數  $X$  表示選出的  $r$  個人中屬於甲班的人數， $X = 0, 1, 2, \dots, r$ ，證明  $P(X = k)$

的最大值僅發生在  $k = \left\lfloor \frac{(m+1)(r+1)}{m+n+2} \right\rfloor$  時。 (註： $\lfloor \ ]$  為高斯符號) (9分)

3. 設  $f(x) = x^2 + 3x - 4$ ，無窮數列  $\langle a_n \rangle$  滿足  $a_1 = 0$ ，且當  $n \geq 1$  時， $a_{n+1}$  為滿足不等式

$f(x) \leq a_n$  之  $x$  的最大值。

(1) 求  $a_2$  的值？(1分)

(2) 證明：數列  $\langle a_n \rangle$  收斂，並求出其極限值。(8分)