1必选 新竹市立建功高中 114 學年度第一次正式教師甄選【高中數學】試題卷

2025.3.24(一)～3.29(六) 段考週

一、 填充題：(每題 5 分，共 75 分)

28 1.甲、乙、丙、丁、戊共 5 人排成一列，滿足甲與乙、丙均不相鄰，且丁與戊不相鄰的排法有________種。

$2-\sqrt{2}$ 2.已知 z 是複數且 $z-\dfrac{4}{z}$ 是純虛數，則 $|z-1-i|$ 的最小值是________。

$\dfrac{4235}{6}$ 3.設 $f(n)$ 表示最接近 $\sqrt[6]{n}$ 的整數，求 $\displaystyle\sum_{k=1}^{2026}\frac{1}{f(k)}=$________。

25 4.坐標空間中有三個彼此互相垂直之向量 $\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}$。已知 $\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}=(-1,7,0)$，且 $\overrightarrow{v}-\overrightarrow{w}=(4,-3,1)$。試問由 $\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}$ 所張出的平行六面體之體積=_________。

$6+4\sqrt{6}$ 5.將 10 個半徑為 3 的球堆成一個三角垛(下為上視圖)，則最上面那顆球的最高點離地面的高度為__________。

16 6.某液晶面板由紅、綠、藍三種顏色的 LED 燈泡組成。已知各色燈泡亮燈的循環規律如下：

紅色：「亮 3 秒，再暗 1 秒，再亮 2 秒」

綠色：「亮 6 秒，再暗 2 秒」

藍色：「亮 k 秒，再暗 $(18-k)$ 秒」，其中 k 為正整數。

若在某時刻三種顏色的燈泡同時各自開始作上述循環，面板上都一直有燈亮著，並設各燈泡亮、暗切換的時間極短可被忽略，則 k 的最小值=_________。

108 7.坐標平面上，設 Γ 為三次函數 $f(x)=x^3-9x^2+15x-3$ 的函數圖形，$P(1,4)$ 為 Γ 上之一點，試求 Γ 在 P 點的切線 L 和 Γ 所圍成有界區域的面積=_________。

$\dfrac{24}{7}$ 8.坐標空間中，考慮邊長為 2 的正立方體，固定一頂點 O。從 O 以外的七個頂點隨機選取相異兩點，設此兩點為 P、Q，試問所得的內積 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}$ 之期望值=_________。

$\dfrac{1}{8}$ 9.在菱形 $ABCD$ 中，$\angle DAB=60^\circ$，將 ΔABD 沿對角線 $\overline{BD}$ 折起得 ΔA_1BD，使得 A_1BD 面與 CBD 面所夾二面角為 60°，設向量 $\overrightarrow{DA_1}$ 與向量 $\overrightarrow{BC}$ 的夾角為 θ，則 $\cos\theta=$________。

$\dfrac{1}{4}$ 10.方程式 $\sqrt{1-x^2}=4x^3-3x$ 的所有實根的乘積為________。

$2\pi-5$ 11.設 $f(x)=log\left(\sqrt{1+\pi^2x^2}-\pi x\right)+\pi$，已知 $f(m)=5$，則 $f(-m)=$________。

678 12.在座標平面上，求滿足 $|13x-10y+6|+|17x+13y-2|\le 339$ 的區域面積為________。

106 学科决賽

13.$f(x)$ 為一個五次實係數多項式，如果 $f(x)+1$ 能被 $(x-1)^3$ 整除，且 $f(x)-1$ 能被 $(x+1)^3$ 整除，則滿足上述條件之 $f(x)=$_________

$-\dfrac{3}{8}x^5+\dfrac{5}{4}x^3-\dfrac{15}{8}x$

[1] $\sqrt{丁}\sqrt{戊}\sqrt{}$ 甲乙丙 $3!\,2!=12$ → 28

$\sqrt{丁}\,\square\,戊\sqrt{}$ 甲 乙丙 $1\times C^2_1\times 2\cdot 2!\,2!=16$

[2] 令 $z=re^{i\theta}$，$\cos\theta\left(r-\dfrac{4}{r}\right)=0 \Rightarrow r=2$，$|z|=2$，(1,1)，min $=2-\sqrt{2}$

[3] $f(n)=\square$：1：$1-\frac12$，$1+\frac12$；$1\le n<\frac{3^6}{2^6}=11.\sim$；11

2：$2-\frac12<\sqrt[6]{n}<2+\frac12$；$12\le n<\frac{5^6}{2^6}=244.\sim$；233

3：$3-\frac12$，$3+\frac12$；$245\le n<\frac{7^6}{2^6}=1838.\sim$；1594

4：$4-\frac12$，$4+\frac12$；$1839\le n\le 2026$；188

个数

$11+\dfrac{233}{2}+\dfrac{1594}{3}+\dfrac{188}{4}=\dfrac{4235}{6}$

[4] $\overrightarrow{u}-\overrightarrow{w}=(3,4,1)$

$|\overrightarrow{u}|^2+|\overrightarrow{v}|^2=50$，$|\overrightarrow{v}|^2+|\overrightarrow{w}|^2=26$，$|\overrightarrow{u}|^2+|\overrightarrow{w}|^2=26$ $\Rightarrow |\overrightarrow{u}|^2+|\overrightarrow{v}|^2+|\overrightarrow{w}|^2=51$ $\Rightarrow V=1\cdot\sqrt{25}\cdot\sqrt{25}=25$

[8] $|\overrightarrow{a}+\cdots+\overrightarrow{g}|^2=|(4,4,4)|^2=1^2\times 3+(\sqrt2)^2\times 3+(\sqrt3)^2\times 1+2\,\square$

$E=\dfrac{18}{C^7_2}\times 4=\dfrac{24}{7}$

[5] $\dfrac{2\sqrt6}{3}\times 6+3\times 2=4\sqrt6+6$

[6] find R,G 皆不亮的時段 ← B要亮 $[6,8]=24$，$[6,8,18]=72$

RG同時 暗 k至少為

0－18：15－16：16

18－36：39－40：4

36－54：63－64：10

54－72

$40\equiv 4 \pmod{18}$

$64\equiv 10 \pmod{18}$

[7] $m=f'(1)=0$

$L: y=4$

$\Gamma: y=x^3-9x^2+15x-3 \Rightarrow x=1$ or 7

$\displaystyle\int_1^7 (x^3-9x^2+15x-3)\,dx=\frac{1}{12}\cdot(7-1)^4=108$

yymath $A=\left|\dfrac{a}{12}(\alpha-\beta)^4\right|$

相切 $x=1,1,\square$；$1+1+\square=\dfrac{9}{1}$；$\square=7$

$E=(18/C^7_2)\times 4=24/7$ 兩兩內積

[9] $A_1\left(0,\frac{\sqrt3}{2},\frac32\right)$，$(-1,0,0)$，$C(0,\sqrt3,0)$，$B(1,0,0)$，$(0,0,0)$

$\dfrac{(1,\sqrt3/2,3/2)\cdot(-1,\sqrt3,0)}{2\times 2}=\dfrac{1}{8}$

[10] 微分：$12x^2=3$，$x=\pm\frac12$

$4(-\frac12)^3-3(-\frac12)=1>\sqrt{1-\frac14}$

上半圓

$16x^6\cdots-1=0$

6根乘積 $=\dfrac{-1}{16}$，$\alpha\beta\gamma=\dfrac14$

[11] $f(m)+f(-m)=2\pi+\log 1 \Rightarrow f(-m)=2\pi-5$

[12] $\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}13&-10\\17&13\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$

$A'=\left|\begin{matrix}13&-10\\17&13\end{matrix}\right|\cdot A$

$\dfrac{(339\sqrt2)^2}{339}=678$

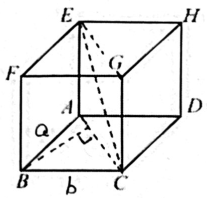
[13] $(x-1)^2\mid f'(x)$，$(x+1)^2\mid f'(x)$ $\Rightarrow$ 令 $f'(x)=A(x-1)^2(x+1)^2=A(x^4-2x^2+1)$ $\Rightarrow f(x)=A\left(\frac35x^5-\frac23x^3+x\right)+C$

yymath 2創正

$f(1)=\frac{8}{15}A+C=-1$，$f(-1)=\frac{-8}{15}A+C=1 \Rightarrow A=\frac{-15}{8}, C=0$

14.如圖，長方體 ABCDEFGH 中，對角線 $\overline{CE}$ 至不相鄰三邊的距離分別為 $2\sqrt{5}$、$\frac{30}{\sqrt{13}}$、$\frac{15}{\sqrt{10}}$，則此長方體體積為______。

750



$$\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}=2\sqrt{5} \qquad \frac{bc}{\sqrt{b^2+c^2}}=\frac{30}{\sqrt{13}} \qquad \frac{ca}{\sqrt{c^2+a^2}}=\frac{15}{\sqrt{10}}$$

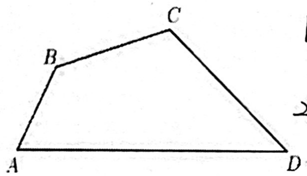
$$\Rightarrow \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{1}{20}=\frac{45}{900} \qquad \frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{13}{900} \qquad \frac{1}{c^2}+\frac{1}{a^2}=\frac{2}{45}=\frac{40}{900}$$

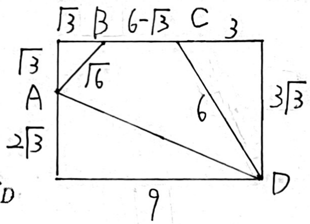
$$\Rightarrow a^2=\frac{900}{49-45} \qquad b^2=\frac{900}{49-13} \qquad c^2=\frac{900}{49-40}$$

$$\Rightarrow abc=\frac{30\cdot30\cdot30}{2\cdot6\cdot3}=750$$

15.一個凸四邊形 ABCD 如圖所示，其中 $\angle ABC=135^\circ$，$\angle BCD=120^\circ$，$\overline{AB}=\sqrt{6}$，$\overline{BC}=6-\sqrt{3}$，$\overline{CD}=6$，求 $\overline{AD}$=______。

$\sqrt{93}$





$\Rightarrow \overline{AD}=\sqrt{93}$

二、計算證明題(15 分)

1.有一個不均勻的骰子，擲出 1、2、3、4、5、6 點的機率依序為 a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6，且數列 $\langle a_n \rangle$ 恰為等差數列，今投擲此骰子兩次，所得的點數依序記為 a、b，若事件『$a+b=7$』發生的機率是 $\frac{1}{7}$，求

$\frac{1}{3}$

(1) $a_2+a_5=$ ？(2%)

$\frac{4}{21}$

(2) 事件『$a=b$』發生的機率為何？(5%)

$\boxed{1}$ (1) $a_1+a_6=a_2+a_5=a_3+a_4=\frac{1}{3}$

(2)

$$\boxed{\begin{aligned} &a_1^2+a_6^2 \\ &a_2^2+a_5^2 \\ &a_3^2+a_4^2 \end{aligned}}\begin{aligned} &+2a_1a_6=\tfrac{1}{9} \\ &+2a_2a_5=\tfrac{1}{9} \\ &+2a_3a_4=\tfrac{1}{9} \end{aligned}$$

$$\boxed{}=\frac{1}{3}-\frac{1}{7}=\frac{4}{24}$$

2.試證：$\frac{1}{\cos 0^\circ \cos 1^\circ}+\frac{1}{\cos 1^\circ \cos 2^\circ}+\frac{1}{\cos 2^\circ \cos 3^\circ}+\cdots\cdots+\frac{1}{\cos 88^\circ \cos 89^\circ}=\frac{\cos 1^\circ}{\sin^2 1^\circ}$ (8%)

三、問答題(10 分)

在數位學習盛行的時代，請推薦一個適合高中學生學習數學的數位學習平台，說明其優缺點，並簡述您將如何引導學生使用該平台自主學習及製作學習歷程檔案。

$\boxed{2}$

$$\frac{\sin((k+1)^\circ-k^\circ)}{\cos k^\circ \cos(k+1)^\circ}=\frac{\sin(k+1)^\circ \cos k^\circ-\cos(k+1)^\circ \sin k^\circ}{\cos k^\circ \cos(k+1)^\circ}=\tan(k+1)^\circ-\tan k^\circ$$

$$\Rightarrow \tan 1^\circ+\tan 2^\circ+\cdots+\tan 88^\circ+\tan 89^\circ$$

$$-(\tan 0^\circ+\tan 1^\circ+\cdots+\tan 88^\circ)=\tan 89^\circ=\cot 1^\circ=\frac{\cos 1^\circ}{\sin 1^\circ} \Rightarrow \#$$