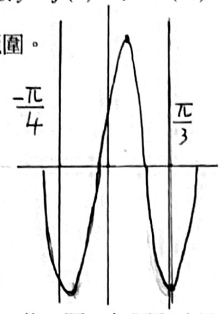
114台南女中

$\frac{8}{3} \le k < 4$

12. 設實數 $k>0$，已知函數 $y=f(x)=\sqrt{3}\sin(kx)+\cos(kx)$ 在區間 $\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}\right]$ 的圖形恰有一個最高點 $(y=2)$，也恰有一個最低點 $(y=-2)$，求 k 的範圍。

$f(x)=2\sin\left(kx+\frac{\pi}{6}\right)$

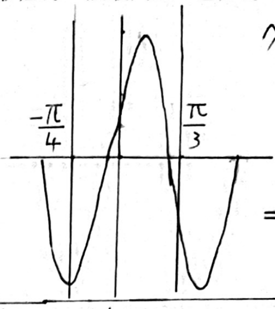


$x=\frac{\pi}{3}$

$\downarrow$

$\frac{k\pi}{3}+\frac{\pi}{6}=\frac{3\pi}{2}$

$\Rightarrow k=4$



$x=-\frac{\pi}{4}$

$\downarrow$

$\frac{-k}{4}\pi+\frac{\pi}{6}=\frac{-\pi}{2}$

$\Rightarrow k=\frac{8}{3}$

第二部分：

說明：

- 本部分為「非填充題」，共 4 題，每題配分於題後。
- 請將答案填入答案卷中之「非填充題」作答區，並標註題號。

$\boxed{1}$ (1)

$\begin{bmatrix} a(1-b)+(1-b)(1-a) \\ (1-a)(1-b)+b(1-a)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1-b\\1-a\end{bmatrix}$

$|M-\lambda I|=\begin{vmatrix} a-\lambda & 1-b \\ 1-a & b-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-(a+b)\lambda+a+b-1$

$\lambda \quad -1$

$\lambda \quad -(a+b-1)$

(2) $V(1)=\ker\begin{pmatrix} a-1 & 1-b \\ 1-a & b-1\end{pmatrix}=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}1-b\\1-a\end{pmatrix}\right\}$

$V(a+b-1)=\ker\begin{pmatrix} 1-b & 1-b \\ 1-a & 1-a\end{pmatrix}=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right\} \Rightarrow P=\begin{bmatrix}1-b & 1\\ 1-a & -1\end{bmatrix}$

$P^{-1}=\frac{1}{a+b-2}\begin{bmatrix}-1 & -1\\ a-1 & 1-b\end{bmatrix}$

$D=P^{-1}MP$

1. 令二階轉移矩陣 $M=\begin{bmatrix} a & 1-b \\ 1-a & b\end{bmatrix}$，其中 $M\neq I_2$，$0\le a,b\le 1$。

$\begin{bmatrix}1-b\\1-a\end{bmatrix}, (a+b-1)\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$

(1) 試求 $M\begin{bmatrix}1-b\\1-a\end{bmatrix}$ 和 $M\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$。(2 分)

$r=\frac{1}{2-a-b}$

(2) 設 x, y 均為非負實數且滿足 $x+y=1$。若 $M^n\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=r\begin{bmatrix}1-b\\1-a\end{bmatrix}+s\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$，求 r, s。(以 x, a, b 表示) (6 分)

$s=\left(x-\frac{1-b}{2-a-b}\right)\cdot(a+b-1)^n$

(3) 承(2)，設 $M^n\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_n\\y_n\end{bmatrix}$，試證：若 $(a,b)\neq(0,0)$，則 $\langle x_n\rangle$、$\langle y_n\rangle$ 均為收斂數列。(4 分)

(2) $M^n=PD^nP^{-1}=\frac{1}{a+b-2}\begin{bmatrix}1-b & 1\\ 1-a & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & (a+b-1)^n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & -1\\ a-1 & 1-b\end{bmatrix}$

$=\frac{1}{a+b-2}\begin{bmatrix}1-b & \lambda^n\\ 1-a & -\lambda^n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & -1\\ a-1 & 1-b\end{bmatrix}$ (令 $a+b-1=\lambda$)

$\Rightarrow \frac{1}{a+b-2}\begin{bmatrix}-(1-b)+\lambda^n(a-1) & -(1-b)+\lambda^n(1-b)\\ -(1-a)-\lambda^n(a-1) & -(1-a)-\lambda^n(1-b)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\1-x\end{bmatrix}$

$\Rightarrow \frac{1}{2-a-b}\left(\begin{bmatrix}1-b & 1-b\\ 1-a & 1-a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\1-x\end{bmatrix}+\lambda^n\left(\begin{bmatrix}-(a-1) & -(1-b)\\ a-1 & 1-b\end{bmatrix}\right)\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}+x\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}\right)\right)$

$=\frac{1}{2-a-b}\begin{bmatrix}1-b\\1-a\end{bmatrix}+\frac{\lambda^n}{2-a-b}\left(-(1-b)\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}+x\begin{bmatrix}2-a-b\\a+b-2\end{bmatrix}\right)$ $\leftarrow -a+1+1-b$ $\leftarrow a-1+b-1$

$\begin{bmatrix}x_n\\y_n\end{bmatrix}=\frac{1}{2-a-b}\begin{bmatrix}1-b\\1-a\end{bmatrix}+\left(x-\frac{1-b}{2-a-b}\right)(a+b-1)^n\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$

(3) $x_{n+1}<x_n$

$x_n<\frac{1-b}{2-a-b}, \forall n\in\mathbb{N}$

$\Rightarrow x_n$ con

$\Rightarrow y_n=1-x_n$ con

$\boxed{2}$

n	$[\sqrt{n}]$	$n/[\sqrt{n}]$	$[\frac{n}{\sqrt{n}}]$
1	1	1/1	1
2	1	2/1	2
3	1	3/1	3
$2^2=4$	2	4/2	2
5	2	5/2	2
6	2	6/2	3
7	2	7/2	3
8	2	8/2	4
$3^2=9$	3	9/3	3
10	3	10/3	3
11	3	11/3	3
12	3	⋮	4
13	3	⋮	4
14	3	⋮	4
$\boxed{15}$	3	⋮	5
⋮	⋮		⋮
24	4		6
25	5		5
⋮	⋮		⋮
$\boxed{29}$	5		5
30	5		6

法1

2. 對於正整數 n，函數 $f(n)$ 定義為 $f(n)=\left[\frac{n}{[\sqrt{n}]}\right]$，其中符號[ ]為高斯符號。

例如：$f(7)=\left[\frac{7}{[\sqrt{7}]}\right]=\left[\frac{7}{2}\right]=3$。

(1) 若正整數 n 滿足 $f(n)=5$，求 n 的最大值與最小值。(5 分) 29 15

(2) 在所有滿足 $n\le 2025$ 的正整數 n 中，求使得 $f(n)>f(n+1)$ 的 n 共有幾個? (5 分) 44

$\boxed{2}$ (1) 法2：Satsuki91000

設 $[\sqrt{n}]=k \Rightarrow k^2\le n<(k+1)^2$

因此 $k\le\frac{n}{[\sqrt{n}]}<k+2+\frac{1}{k}$

已知 $\left[\frac{n}{[\sqrt{n}]}\right]=5 \Rightarrow 5\le\frac{n}{[\sqrt{n}]}<6$

当 $k=3$ $\begin{cases}3\le\frac{n}{3}<5\frac{1}{3}\\ 5\le\frac{n}{3}<6\end{cases} \Rightarrow 15\le n$ (min)

当 $k=5$ $\begin{cases}5\le\frac{n}{5}<7\frac{1}{5}\\ 5\le\frac{n}{5}<6\end{cases} \Rightarrow n<30$

$\Rightarrow n\le 29$ (max)

(2) $2025=45^2 \Rightarrow 44$ 个

若 n & $n+1$ 皆不為完全平方數

則 $[\sqrt{n}]=[\sqrt{n+1}]$

因此 $f(n)=\frac{n}{[\sqrt{n}]}<\frac{n+1}{[\sqrt{n+1}]}=f(n+1)$

若 n 不為完全平方數

$n+1$ 為 ~

設 $n+1=k^2$, $n=k^2-1$

則 $f(n)=\frac{k^2-1}{k-1}=k+1>k=\frac{k^2}{k}=f(n+1)$

3. 試證明：對任意的實數 a，b，c，都有 $\sqrt{a^2+ab+b^2}+\sqrt{a^2+ac+c^2}\geq\sqrt{3a^2+(a+b+c)^2}$，並說明等號成立的充要條件。(9 分)

$\boxed{3}$ 令 $w=e^{i(\pi/3)}$

a^2+ab+b^2

$=a^2+ab(w+\overline{w})+b^2$

$=(a+bw)(a+b\overline{w})$

$\sqrt{a^2+ab+b^2}+\sqrt{a^2+ac+c^2}$

$=|a+bw|+|a+cw|\geq|2a+(b+c)w|=\sqrt{(2a+(b+c)w)(2a+(b+c)\overline{w})}$

$=\sqrt{4a^2+2a(b+c)(w+\overline{w})+(b+c)^2}=\sqrt{3a^2+(a+b+c)^2}$ （大群：4678老師提供）

$\boxed{4}$

4. 設二階實係數方陣 $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 滿足行列式 $\det(A)=1$，O 是坐標平面的原點，對於所有的正整數 n，平面上的點 $P_n(x_n,y_n)$ 滿足 $\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}=A^n\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$。若 $\overline{OP_1}=\overline{OP_2}=1$，試證明對於所有的正整數 n，$\overline{OP_n}=1$。(9 分)

$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a^2+bc \\ ac+cd \end{bmatrix}$

$\begin{cases} ad-bc=1 \\ a^2+c^2=1 \end{cases}$

$(a^2+ad-1)^2+c^2(a+d)^2=1$

$\Rightarrow(a^2+c^2)(a+d)^2-2a(a+d)=0$

$\Rightarrow(a+d)(-a+d)=0$

(i) 當 $a=d$

$\begin{cases} a^2-bc=1 \\ a^2+c^2=1 \end{cases}\Rightarrow c(b+c)=0$

$c=0$，$a=\pm1$

$A=aI\Rightarrow\overline{OP_n}=1$

$b=-c$

$\Rightarrow A=\begin{bmatrix} a & -c \\ c & a \end{bmatrix}$ 為旋轉矩陣 $\Rightarrow\overline{OP_n}=1$

(ii) 當 $a=-d$

$\begin{cases} -a^2-bc=1 \\ a^2+c^2=1 \end{cases}$

$\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} -a \\ -c \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\cdots\cdots$

$(x_{4k+1},y_{4k+1})=(a,c)=-(x_{4k+3},y_{4k+3})$ $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$

$(x_{4k+2},y_{4k+2})=(-1,0)=-(x_{4k},y_{4k})$

參考答案：

填充題

1.	2.	3.	4.	5.	6.
$\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi+\frac{3}{2}$	18	506	7	8	12
7.	**8.**	**9.**	**10.**	**11.**	**12.**
26	$\frac{\sqrt{7}}{3}$	$\frac{51}{2}$	$\frac{-1}{4}$	$\frac{41}{2145}$	$\frac{8}{3}\leq k<4$

非填充題

1. (1) $M\begin{bmatrix} 1-b \\ 1-a \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1-b \\ 1-a \end{bmatrix}$；$M\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a+b-1 \\ 1-a-b \end{bmatrix}=(a+b-1)\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

   (2) $r=\frac{1}{2-a-b}$，$s=(x-\frac{1-b}{2-a-b})(a+b-1)^n$

   (3) 略

2. (1) n 的最大值為 29，最小值為 15

   (2) 44 個

3. 略

4. 略