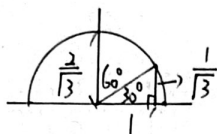


$$\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi + \frac{3}{2} \quad 1. \text{ 試求 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n^2} [\sqrt{4n^2 - (3 \times 1^2)} + \sqrt{4n^2 - (3 \times 2^2)} + \dots + \sqrt{4n^2 - (3 \times n^2)}] = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$\square \quad 3\sqrt{3} \cdot \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{4}{3} - \left(\frac{k}{n}\right)^2}$$



$$\rightarrow 3\sqrt{3} \int_0^1 \sqrt{\frac{4}{3} - x^2} dx = 3\sqrt{3} \left(\frac{4}{3} \pi \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \right) = \frac{2\sqrt{3}}{3} \pi + \frac{3}{2}$$

18 2. 設函數 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, $(x \in \mathbb{R})$, 其中 a, b, c 為互不相同的非零整數, 且 $f(a) = a^3$, $f(b) = b^3$, 則 $a + b + c$ 為何?

$$\square \quad \begin{aligned} g(x) &= ax^2 + bx + c = a(x-a)(x-b) & g(1) &= a(a-1)(b-1) \\ \Rightarrow b &= -a(a+b) \Rightarrow b = \frac{1-a^2-1}{1+a} = \frac{-a^2-1}{1+a} \in \mathbb{Z} & &= -2 \cdot (-3) \cdot 3 \\ b &= -a^2 - ab & \Rightarrow a &= -2, b = 4 & &= 18 \end{aligned}$$

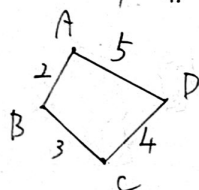
506 3. 設三次函數 $f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{1}{8}$, 求 $\sum_{k=1}^{2024} f\left(\frac{k}{2025}\right)$ 的值。

$$\square \quad h = \frac{1}{2} \quad \frac{f\left(\frac{k}{2025}\right) + f\left(\frac{2025-k}{2025}\right)}{2} = \frac{1}{4}$$

$$k = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

$$\text{I.P.} \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) \Rightarrow \frac{1}{4} \times 2 \times \frac{2024}{2} = 506$$

7 4. 在空間中有一四邊形 $ABCD$, 已知 $\overline{AB} = 2$, $\overline{BC} = 3$, $\overline{CD} = 4$, $\overline{DA} = 5$, 試求 $\overline{AC} \cdot \overline{BD} = ?$



$$(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) \cdot (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CD} + 9 = -2 + 9 = 7$$

$$25 = |\overrightarrow{AD}|^2 = |(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD})|^2 = 4 + 9 + 16 + 2[\boxed{}] \Rightarrow -2$$

8 5. 已知對所有的實數 x , 二次函數 $y = ax^2 + bx + c \geq 0$, 且 $a < b$, 則 $\frac{a+2b+4c}{b-a}$ 的最小值為何?

$$D \leq 0 \Rightarrow \frac{b^2}{a^2} \leq \frac{4ac}{a^2} \leq 4\left(\frac{c}{a}\right)$$

微分=0

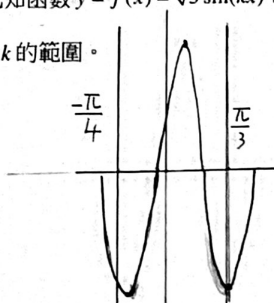
$$\frac{1 + 2\left(\frac{b}{a}\right) + 4\left(\frac{c}{a}\right)}{\frac{b}{a} - 1} \geq \frac{S^2 + 2S + 1}{S - 1} = \frac{(S+1)^2}{S-1} \Rightarrow 2(S+1)(S-1) - (S+1)^2 = 0$$

$$\Rightarrow S = 3 \quad \wedge \quad f''(3) > 0$$

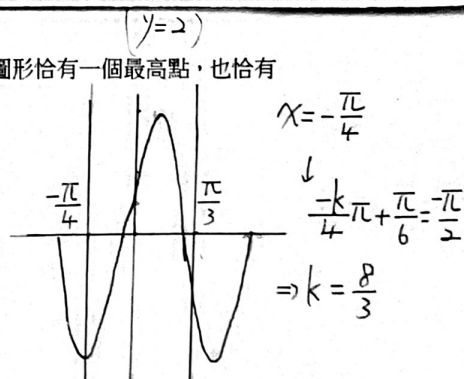
$$\Rightarrow \min = \frac{16}{2} = 8$$

12. 設實數 $k > 0$, 已知函數 $y = f(x) = \sqrt{3} \sin(kx) + \cos(kx)$ 在區間 $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right]$ 的圖形恰有一個最高點, 也恰有一個最低點, 求 k 的範圍。

$$f(x) = 2 \sin\left(kx + \frac{\pi}{6}\right) \quad (y = -2)$$



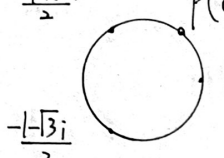
$$\begin{aligned} x &= \frac{\pi}{3} \\ \downarrow \\ \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{6} &= \frac{3\pi}{2} \\ \Rightarrow k &= 4 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} x &= -\frac{\pi}{4} \\ \downarrow \\ -\frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{6} &= -\frac{\pi}{2} \\ \Rightarrow k &= \frac{8}{3} \end{aligned}$$

第二部分:
說明:

6. 設 $\triangle ABC$ 是單位圓 Γ 的一個內接正三角形。若 P 點為圓 Γ 上一動點，求 P 點分別到 A 、 B 、 C 三點的三個連線段的平方和之最大值及最小值之和為_____。

[6] $\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$ $P(\cos\theta + i\sin\theta)$ $(C-1)^2 + 5^2 + (C+\frac{1}{2})^2 + (S-\frac{\sqrt{3}}{2})^2 + (C+\frac{1}{2})^2 + (S+\frac{\sqrt{3}}{2})^2 = 3+3=6$

 若外接圓半徑 $R \rightarrow 6R^2$ (定值)

7. 已知數列 $\langle a_n \rangle$ 滿足 $a_{n+1} = 2a_n - 1$ (對任意正整數 n 都成立)且 $a_1 = 2$ ，求滿足不等式 $a_n^2 - 2a_n > 10^{15}$ 的最小自然數 $n = \underline{\hspace{2cm}}$ 。(已知 $\log 2 \approx 0.3010$)

[7] $k = 2^k - 1 \Rightarrow k = 1$ $a_n(a_n - 2) = 2^{2(n-1)} - 1 > 10^{15}$

$\Rightarrow a_n = 2^{n-1}(2-1) + 1 = 2^{n-1} + 1$
 $\Rightarrow n > \frac{15}{2 \times \log 2} + 1 \approx 25.9 \Rightarrow 26$

8. 正四面體 $ABCD$ 中，設點 P 為 $\overline{AB}$ 邊的中點，點 Q 在 $\overline{AC}$ 邊上移動。求 $\cos \angle PDQ$ 的最大值為_____。

[8] $C(2,0,2)$ $B(0,2,2)$ $P(1,2,1)$ $Q(2,t,2-t)$ $A(2,2,0)$
 $\cos D = \frac{\overrightarrow{DP} \cdot \overrightarrow{DQ}}{|\overrightarrow{DP}| |\overrightarrow{DQ}|} = \frac{t+4}{\sqrt{6} \sqrt{2} \sqrt{(t-1)^2+3}} = \frac{t+4}{2\sqrt{3} \sqrt{(t-1)^2+3}} \leq \frac{2\sqrt{7}}{2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{7}}{3}$
 $((t-1)^2 + (\sqrt{3})^2)(1^2 + (\frac{5}{3})^2) \geq (t+4)^2$

9. 有一副紙牌共有50張，其中有三張A，隨機地洗牌，然後從最上面開始一張接一張地攤牌，直到翻出第二張A出現為止，試求：翻過的牌數的期望值。

[9] $\frac{47}{4}$ $\frac{47}{4}$ $\frac{47}{4}$ $\frac{47}{4}$ $\frac{47}{4} \times 2 + 2 = \frac{51}{2}$
 A A A

10. 若實數 $x > 1$ 滿足 $\log_2(\log_4 x) + \log_4(\log_{16} x) + \log_{16}(\log_2 x) = 0$ ，則 $\log_2(\log_{16} x) + \log_{16}(\log_4 x) + \log_4(\log_2 x)$ 的值為何？

[10] 令 $t = \log_2 x$ $\log_2(\frac{1}{2}t)(\frac{1}{4}t)^{\frac{1}{2}}(t)^{\frac{1}{4}} = 0 - \text{①}$ $\text{②} - \text{①}$
 $\log_2(\frac{1}{4}t)(\frac{1}{2}t)^{\frac{1}{2}}(t)^{\frac{1}{4}} = k - \text{②}$
 $\Rightarrow k = \log_2 \frac{2 \cdot 2}{4 \cdot 2^{\frac{1}{4}}} = -\frac{1}{4}$

- cut 6997 $\frac{41}{2145}$ 11. 有一個四列四行的表格如下圖，在16個空格中分別任意填入1,2,...,15,16這16個連續正整數(不得重複)，每個空格恰填入一個數，則每行、每列所填的數之和都是偶數的機率為何？

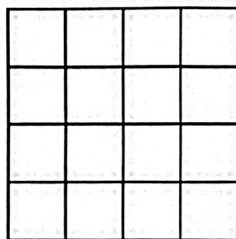
[11] 考慮奇表

4×4 4×4

$C_2^4 \cdot 2^4$ 列行

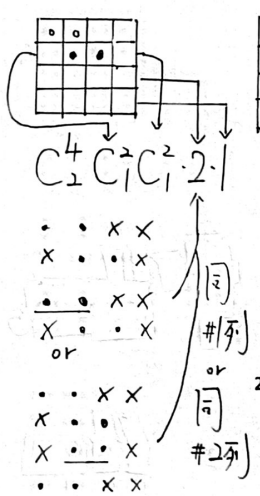
4×4 4×4

$C_2^4 C_2^3 C_2^2 \cdot 1 \cdot 2 = C_2^4 \cdot 2^4$



2×2 2×2

$C_2^4 \cdot 1$



$C_2^4 \cdot C_2^4$

$\frac{C_2^4(2+2+4+15)}{C_2^{16}} = \frac{41}{2145}$