國立臺南女子高級中學 114 學年度第 1 次教師甄選初試(筆試)

數學科題目

第一部分：

說明：

- 本部分為「填充題型」，共 12 題，每題 5 分，完全正確才得分。
- 請依題號將答案填入答案卷中之「填充題型」作答區之第 1~12 題。

1. 試求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3}{n^2}\left[\sqrt{4n^2-(3\times1^2)}+\sqrt{4n^2-(3\times2^2)}+\ldots\ldots+\sqrt{4n^2-(3\times n^2)}\right]=$________。

2. 設函數 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$，$(x\in R)$，其中 a，b，c 為互不相同的非零整數，且 $f(a)=a^3$，$f(b)=b^3$，則 $a+b+c$ 為何？

3. 設三次函數 $f(x)=x^3-\dfrac{3}{2}x^2+\dfrac{3}{4}x+\dfrac{1}{8}$，求 $\sum\limits_{k=1}^{2024}f\left(\dfrac{k}{2025}\right)$的值。

4. 在空間中有一四邊形$ABCD$，已知 $\overline{AB}=2$，$\overline{BC}=3$，$\overline{CD}=4$，$\overline{DA}=5$，試求 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=$？

5. 已知對所有的實數 x，二次函數 $y=ax^2+bx+c\geq 0$，且 $a<b$，則 $\frac{a+2b+4c}{b-a}$ 的最小值為何？

6. 設ΔABC是單位圓Γ的一個內接正三角形。 若P點為圓Γ上一動點，求P點分別到A、B、C三點的三個連線段的平方和之最大值及最小值之和為________。

7. 已知數列$\langle a_n \rangle$滿足$a_{n+1}=2a_n-1$(對任意正整數n都成立)且$a_1=2$，求滿足不等式$a_n^{\ 2}-2a_n>10^{15}$的最小自然數$n=$______。 (已知 log 2≈0.3010)

8. 正四面體$ABCD$中，設點P為$\overline{AB}$邊的中點，點Q在$\overline{AC}$邊上移動。求$\cos\angle PDQ$的最大值為______。

9. 有一副紙牌共有 50 張，其中有三張 A，隨機地洗牌，然後從最上面開始一張接一張地攤牌，直到翻出第二張 A 出現為止，試求：翻過的牌數的期望值。

10. 若實數$x>1$滿足$\log_2(\log_4 x)+\log_4(\log_{16} x)+\log_{16}(\log_2 x)=0$，則$\log_2(\log_{16} x)+\log_{16}(\log_4 x)+\log_4(\log_2 x)$的值為何？

11. 有一個四列四行的表格如下圖，在 16 個空格中分別任意填入$1,2,\cdots,15,16$這 16 個連續正整數(不得重複)，每個空格恰填入一個數，則每行、每列所填的數之和都是偶數的機率為何？

12. 設實數$k>0$，已知函數$y=f(x)=\sqrt{3}\sin(kx)+\cos(kx)$在區間$\left[-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{3}\right]$的圖形恰有一個最高點，也恰有一個最低點，求$k$的範圍。

第二部分：

說明：

- 本部分為「非填充題」，共4題，每題配分於題後。
- 請將答案填入答案卷中之「非填充題」作答區，並標註題號。

1. 令二階轉移矩陣$M=\begin{bmatrix} a & 1-b \\ 1-a & b \end{bmatrix}$，其中$M\neq I_2$，$0\leq a,b\leq 1$。
   (1) 試求$M\begin{bmatrix} 1-b \\ 1-a \end{bmatrix}$和$M\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$。(2分)
   (2) 設x, y均為非負實數且滿足$x+y=1$。若$M^n\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=r\begin{bmatrix} 1-b \\ 1-a \end{bmatrix}+s\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$，求$r, s$。(以$x, a, b$表示) (6分)
   (3) 承(2)，設$M^n\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}$，試證：若$(a,b)\neq(0,0)$，則$\langle x_n\rangle$、$\langle y_n\rangle$均為收斂數列。(4分)

2. 對於正整數n，函數$f(n)$定義為$f(n)=\left[\dfrac{n}{[\sqrt{n}]}\right]$，其中符號[ ]為<u>高斯</u>符號。

   例如：$f(7)=\left[\dfrac{7}{[\sqrt{7}]}\right]=\left[\dfrac{7}{2}\right]=3$。

   (1) 若正整數n滿足$f(n)=5$，求n的最大值與最小值。(5分)
   (2) 在所有滿足$n\leq 2025$的正整數n中，求使得$f(n)>f(n+1)$的n共有幾個? (5分)

3. 試證明：對任意的實數 a，b，c，都有$\sqrt{a^2+ab+b^2}+\sqrt{a^2+ac+c^2}\geq\sqrt{3a^2+(a+b+c)^2}$，並說明等號成立的充要條件。(9 分)

4. 設二階實係數方陣 $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$滿足行列式 $\det(A)=1$，O 是坐標平面的原點，對於所有的正整數 n，平面上的點 $P_n(x_n, y_n)$ 滿足 $\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}=A^n\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$。若 $\overline{OP_1}=\overline{OP_2}=1$，試證明對於所有的正整數 n，$\overline{OP_n}=1$。(9 分)

參考答案：

填充題

1.	**2.**	**3.**	**4.**	**5.**	**6.**
$\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi+\frac{3}{2}$	18	506	7	8	12
7.	**8.**	**9.**	**10.**	**11.**	**12.**
26	$\frac{\sqrt{7}}{3}$	$\frac{51}{2}$	$\frac{-1}{4}$	$\frac{41}{2145}$	$\frac{8}{3}\leq k<4$

非填充題

1. (1) $M\begin{bmatrix} 1-b \\ 1-a \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1-b \\ 1-a \end{bmatrix}$；$M\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a+b-1 \\ 1-a-b \end{bmatrix}=(a+b-1)\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

   (2) $r=\frac{1}{2-a-b}$，$s=(x-\frac{1-b}{2-a-b})(a+b-1)^n$

   (3) 略

2. (1) n 的最大值為 29，最小值為 15

   (2) 44 個

3. 略

4. 略