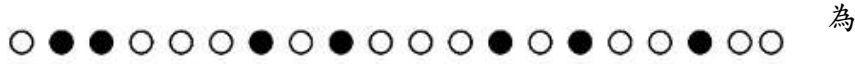


1. 將 7 個黑點，13 個白點排成一列，已知每一種排法出現的機率相同。今任一選一種排法，令隨機變數  $X$  為黑點與白點相鄰的次數。例如若選出的排法為



，則  $X = 12$ 。試求出  $X$  的期望值為\_\_\_\_\_

2. 設  $a, b$  為互質的正整數且都不小於 10，若  $7a + 11b$  為 13 的倍數，求  $a + b$  的最小值

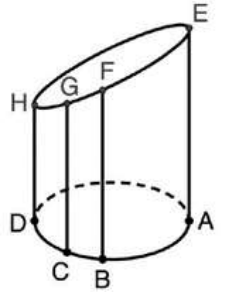
3. 已知  $f(x)$  滿足  $f(\frac{1}{2}) = 1$ ，且  $f(x) + f(y) = f(\frac{x+y}{1+xy})$ 。設  $b_n = n^2 + 3n + 1$ ，求

$$f(\frac{1}{b_1}) + f(\frac{1}{b_2}) + \cdots + f(\frac{1}{b_{2020}})$$

4. 令  $Q^+$  為正有理數集，已知函數  $f: Q^+ \rightarrow Q^+$  且有  $f(xf(y)) = \frac{f(x)}{y^3}$ 。

若  $f(3) = a$  且  $f(7) = b$ ，試求  $f(189)$  之值

5. 將一底半徑為 5 的直圓柱，用一平面截過而得一頂面為橢圓的柱狀體（如圖所示）。設  $E, F, G, H$  為橢圓上的四點，其中  $E, H$  為長軸上的兩端點， $A, B, C, D$  分別為此四點在底圓的投影點。已知  $B, C$  在底圓的直徑  $AD$  的同側，且  $\overline{BC} = 3, \overline{BF} = 10, \overline{CG} = 7$ ，求  $\overline{AE} + \overline{DH}$  的最大值。



6. 對任意自然數  $k$ ，令  $a_k = 1 + \frac{1}{k^2}$ 。試證明：

$$\prod_{k=1}^{2022} a_k = a_1 \times a_2 \times a_3 \times \cdots \times a_{2021} \times a_{2022} < 4$$