國立基隆女中 113 學年第 2 次教師甄試 筆試試題 數學科

2024 8.4(日) ~ 8.5(一) Ru

一、 填充題(每題 4 分，共 52 分，題號標示清楚且照順序填答，無須寫出計算過程)

$\boxed{1}$

48 **1.** 設 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{113}$ 為一等差數列， $b_1, b_2, b_3, \dots, b_{113}$ 為一等比數列，若級數 $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{113} = 2024$ ， $b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_{113} = 113$ ，且兩數列滿足 $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + \dots + a_{113}b_{113} = 4000$ ，求 $a_1b_{113} + a_2b_{112} + a_3b_{111} + \dots + a_{113}b_1 =$

$a_1b_1 + \cdots + a_{113}b_{113} = 4000$

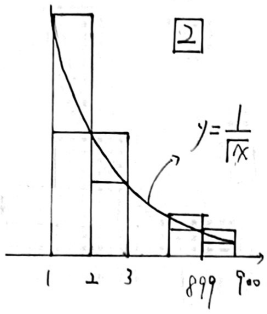
$+)\ a_{113}b_1 + \cdots + a_1b_{113} = \square$

$\Rightarrow \frac{2024 \times 2}{113}(b_1 + \cdots + b_{113}) = 4000 + \square$

$\Rightarrow \square = 48$

$\boxed{2}$

58 **2.** 求 $\sum_{k=1}^{900} \frac{1}{\sqrt{k}}$ 之整數部分為

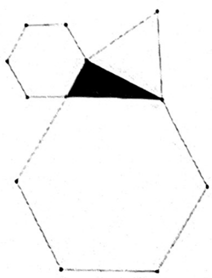


$2(30-1) = 58$

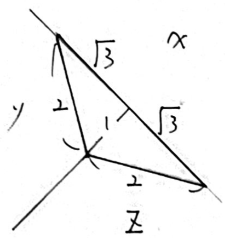
$S - 1 < \int_1^{900} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx < S - \frac{1}{30}$

$\Rightarrow 58 + \frac{1}{30} < S < 59 \Rightarrow [S] = 58$

$\sqrt{3}:1:1$ **3.** 如圖，在紙上任意做一個周長為 12 的三角形，再分別以各邊為邊長，向外做一個正三角形和兩個正六邊形，且這個三角形跟六邊形**不能重疊**。假設向外做出的正三角形邊長 x ，兩個正六邊形邊長為 y, z ，試求向外做出的正三角形和兩個正六邊形面積和有最小值時，此時 $x:y:z =$ ________ 应該是兩六边形不重合 thepiano



$\frac{\sqrt{3}}{4}(x^2 + 6y^2 + 6z^2)$ 要最小，x要最大，y, z 夾角最大 $120°$



此時 $x = \sqrt{y^2 + z^2 + yz}$ $y = z$

$\Rightarrow \sqrt{3} : 1 : 1$

108 **4.** 袋中有大小相同的果凍 36 個，其中草莓、橘子、葡萄三種口味各 12 個。從中選取 20 個，若三種口味都至少拿到一個，則有幾種不同的取法________

1, 1, 1 　20−3 　　13, 1, 1 　20−15

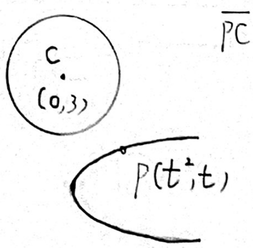
$x + y + z = 17$ 　　$x' + y' + z' = 5$

$H^3_{17} - H^3_5 \cdot 3 = C^{19}_2 - C^7_2 \cdot 3$

$= 19 \cdot 9 - 7 \cdot 3 \cdot 3 = 12 \cdot 9 = 108$

$\sqrt{5}-2$ **5.** 設 x, y 為實數，試求 $\sqrt{(x - 3 - 2\sin y)^2 + (x^2 - 2\cos y)^2}$ 的最小值________

設 $P(x^2, x) \in \Gamma: y^2 = x$ ， $Q(2\cos y, 3 + 2\sin y) \in C: x^2 + (y-3)^2 = 4$



$\overline{PC}^2 = t^4 + t^2 - 6t + 9$

$\frac{d}{dt},\ 4t^3 + 2t - 6 = 0$

$\Rightarrow 2t^2 + t - 3 = 0$

$\begin{matrix} 2 & +3 \\ 1 & -1 \end{matrix}$

当 $t = 1$

$\min = \overline{PC} - r$

$= \sqrt{5} - 2$

$-t^3+6t+20=0$

6. 試求 $\sqrt[3]{6\sqrt{3}-10}-\sqrt[3]{6\sqrt{3}+10}$ 的值為

-2

$\boxed{6}$ 令 $\alpha=\sqrt[3]{6\sqrt{3}-10}$，$\beta=\sqrt[3]{6\sqrt{3}+10}$

$t=\alpha-\beta$

$\alpha^3-\beta^3=(\alpha-\beta)^3+3\alpha\beta(\alpha-\beta)$，$\alpha\beta=2$

$-20=t^3+6t$

$$\begin{array}{r|l} 1\ \ +0\ \ +6\ \ +20 & -2 \\ +)\ \ -2\ \ +4\ \ -20 & \\ \hline 1\ \ -2\ \ +10\ \ +0 & \end{array}$$

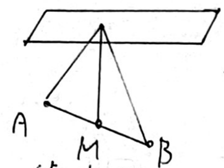
$(t+2)(t^2-2t+10)=0$，$D=4-40<0$

$\Rightarrow t=-2$

7. 已知空間中兩點 $A(3,2,1),B(2,-1,5)$，若平面 $x-y-2z=5$ 上有一點 P，使得 $\overline{AP}^2+\overline{PB}^2$ 的值最小，則此 P 點的坐標為________

$(4,-1,0)$

$\boxed{7}$



$M\left(\frac{5}{2},\frac{1}{2},3\right)$

$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2=2(\overline{MP}^2+\overline{MB}^2)\geq 2\left(d(M,E)^2+\overline{MB}^2\right)$

設 $P\left(t+\frac{5}{2},-t+\frac{1}{2},-2t+3\right)$ 代入 E

$\Rightarrow 6t=9 \Rightarrow t=\frac{3}{2} \Rightarrow P(4,-1,0)$

8. 已知 $-\frac{\pi}{4}\leq\theta\leq\frac{\pi}{4}$，且下列 x,y,z 的方程組

$$\begin{cases}\left(\sqrt{5}(\sin\theta-\cos\theta)\right)x+2y+z=0\\ 3x+y+2z=0\\ 21x+4y+\left(\sqrt{5}(\sin\theta-\cos\theta)+14\right)z=0\end{cases}$$

有異於 $x=y=z=0$ 的解，則此方程組之所有的解為________

$\begin{cases}x=t\\ y=3t\\ z=-3t\end{cases}$，$t\in\mathbb{R}$

$\boxed{8}$ $\begin{vmatrix}\square & 2 & 1\\ 3 & 1 & 2\\ 21 & 4 & \square+14\end{vmatrix}=0 \Rightarrow \square^2+|2-2|=0$

$\Rightarrow \square=-3$ or 3（不合）

$\begin{cases}-3x+2y+z=0\\ 3x+y+2z=0\end{cases} \Rightarrow -y=z$，令 $x=t \Rightarrow \begin{cases}x=t\\ y=3t\\ z=-3t\end{cases}$，$t\in\mathbb{R}$

$\boxed{9}$ 法1：$\sum_{k=2}^{8}kC_k^8\cdot 3^k$

$=\sum_{k=2}^{8}8\cdot C_{k-1}^{7}\cdot 3^{k-1}\cdot 3$

$=24(4^7-1)$

$=393192$

$\begin{bmatrix}u\\ v\\ w\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ 4 & -7 & -5\\ 2 & -1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}$ $\boxed{10}$

$3\sqrt{3}\cdot 8\sqrt{2}\cdot 8\sqrt{6}=|-21+4-20-14-5-24|\cdot\Omega$

$\Rightarrow \Omega=\frac{3\cdot 8\cdot 8\cdot 6}{80}=\frac{72}{5}$

9. 若 $(1+3x)^8=\sum_{k=0}^{8}a_kx^k$，則 $\sum_{k=2}^{8}ka_k=$________

393192

$\boxed{9}$ 法2：$f'(x)=8\cdot(1+3x)^7\cdot 3$　$f'(1)-a_1=24\cdot 4^7-C_1^8\cdot 3=393192$

10. 空間坐標中，滿足 $2\sqrt{3}\leq x+2y-z\leq 5\sqrt{3}$，$-2\sqrt{2}\leq 4x-7y-5z\leq 6\sqrt{2}$，$-\sqrt{6}\leq 2x-y+3z\leq 7\sqrt{6}$ 的所有點 (x,y,z) 所形成的立體圖形為 Ω，則 Ω 的體積為________

$\frac{72}{5}$

$\boxed{11}$ $k(k-1)(k-2)=k^3+k-3k^2+k$　$\Rightarrow$　$k^3+k=k(k-1)(k-2)+3k^2-k$

$3k(k-1)=3(k^2-k)=3k^2-k-2k$　$=k(k-1)(k-2)+3k(k-1)+2k$

令 $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}x^k=(1-x)^{-1}$，$f''(x)=\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)x^{k-2}$

$f'(x)=\sum_{k=1}^{\infty}kx^{k-1}=(1-x)^{-2}$　$=2(1-x)^{-3}$

$f'''(x)=\sum_{k=3}^{\infty}k(k-1)(k-2)x^{k-3}$

$=6(1-x)^{-4}$

11. 兩實數數列 $\langle a_n\rangle$、$\langle b_n\rangle$，滿足：$a_n=n^3+n$，$b_n=3\times 2^{n-1}$，則 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a_k}{b_k}\right)=$

$\frac{56}{3}$

$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{b_k}=\frac{2}{3}\left(6\cdot 2^4\left(\frac{1}{2}\right)^3+3\cdot 2\cdot 2^3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+2\cdot 2^2\cdot\frac{1}{2}\right)=\frac{56}{3}$

$12\ +\ 12\ \ +\ 4$

12. 袋中有大小材質均相同的十顆球，其球上編號分別為 $1,2,3,\cdots,10$，若隨機從袋中取出四個球，球號為 x,y,z,w，其中 $x<y<z<w$，且隨機變數 Y 的取值為 $10-y$，期望值為 $E(Y)$，則 $E(Y)=$

$\frac{28}{5}$

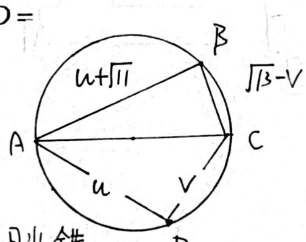
y	2	3	4	5	6	7	8
Y	8	7	6	5	4	3	2
個數	$C_1^1C_2^8$	$C_1^2C_2^7$	$C_1^3C_2^6$	$C_1^4C_2^5$	$C_1^5C_2^4$	$C_1^6C_2^3$	$C_1^7C_2^2$
	28	42	45	40	30	18	7

$E(Y)=\dfrac{8\cdot 28+7\cdot 42+6\cdot 45+5\cdot 40+4\cdot 30+3\cdot 18+2\cdot 7}{\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{4\cdot 3\cdot 2}}$ ← C_4^{10}

$=\frac{28}{5}$

13. 設四邊形 $ABCD$ 四點共圓且直徑 $\overline{AC}$ 長為 4，若 $\overline{AB}-\overline{AD}=\sqrt{11}$，$\overline{CD}+\overline{BC}=\sqrt{13}$，試求 $\overline{BD}=$

$\sqrt{15}$



$u=\frac{\sqrt{195}-\sqrt{99}}{6}$

$v=\frac{\sqrt{165}+\sqrt{117}}{6}$

$\doteqdot 3.9>\sqrt{13}$

$\Rightarrow \overline{BC}<0$　題目錯

$(u+\sqrt{11})^2+(\sqrt{13}-v)^2=16$

$\Rightarrow \sqrt{11}u-\sqrt{13}v=-12$ ―①

令 $\sqrt{13}u+\sqrt{11}v=k$ ―②

$①^2+②^2$：$24(u^2+v^2)=k^2+12\cdot 12$

$\Rightarrow k^2=12\cdot 4(8-3)=4^2\cdot 15$ $\rightarrow$ $=\sqrt{15}$

Ptolemy's theorem

$\overline{BD}=\frac{1}{4}(\sqrt{11}v+\sqrt{13}u)$