臺北市立南港高級中學 113 學年度第 1 次正式教師甄試　　數學科 試題

准考證號碼：

姓名：

(配分: 1~11 題 每題 8 分, 第 12 題 12 分.)

$50\cdot 2^{100}$ 1. 求值: $100C_0^{100}+99C_1^{100}+98C_2^{100}+\cdots+2C_{98}^{100}+C_{99}^{100}$ 。

法1: $kC_k^n=nC_{k-1}^{n-1} \Rightarrow 100\cdot(C_0^{99}+\cdots+C_{99}^{99})$
$=100\cdot 2^{99}=50\cdot 2^{100}$

法2: 令 $f(x)=(1+x)^{100}=\sum_{k=0}^{100}C_k^{100}x^k$
$f'(x)=100(1+x)^{99}=\sum_{k=1}^{100}kC_k^{100}x^{k-1}$ 　$f'(1)=100\cdot 2^{99}$

$R=\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 2. 證明: 在任意 7 個實數中必能找到兩個數 x , y 滿足 $0\le\frac{x-y}{1+xy}\le\frac{\sqrt{3}}{3}$ 。

$R_1=\left(-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{3}\right]$ 　$R_4=\left[0,\frac{\pi}{6}\right]$
$R_2=\left[-\frac{\pi}{3},-\frac{\pi}{6}\right]$ 　$R_5=\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$
$R_3=\left[-\frac{\pi}{6},0\right]$ 　$R_6=\left[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right]$

$R=R_1\cup\cdots\cup R_6$
$\forall x\in\mathbb{R},\ \exists\theta\in R_i,\ \ni x=\tan^{-1}\theta$. For seven real numbers, there exists two numbers $x=\tan^{-1}\theta_1$, $y=\tan^{-1}\theta_2$, $\theta_1,\theta_2\in R_i$, $1\le i\le 6 \Rightarrow 0\le|\theta_1-\theta_2|\le\frac{\pi}{6}$
$\Rightarrow 0\le\tan|\theta_1-\theta_2|\le\tan\frac{\pi}{6} \Rightarrow 0\le\frac{x-y}{1+xy}\le\frac{1}{\sqrt{3}}$. Q.E.D. (朱氏幸福)

60 3. 小明想要安排從星期一到星期五共五天的午餐計畫。他的餐點共有四種選擇：牛肉麵、大滷麵、咖哩飯及排骨飯。小明想要依據下列兩原則來安排他的午餐：

106學測

（甲）每天只選一種餐點但這五天中每一種餐點至少各點一次

（乙）連續兩天的餐點不能重複且不連續兩天吃麵食

根據上述原則，小明這五天共有幾種不同的午餐計畫？

$A=\{x,y\}$
$B=\{a,b\}$

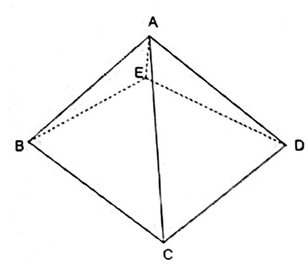
(i) 3A2B
$x\ a\ y\ b\ y \rightarrow \left(\frac{3!}{2!}\cdot 2\right)\cdot 2=12$

(ii) 2A3B : $x\,y\,a\,a\,b$ 排列
xy不相鄰 − xy不相鄰且aa相鄰
$\left(\frac{3!}{2!}\cdot 4\cdot 3-2!\cdot 3\cdot 2\right)\cdot 2=48$

$12+48=60$

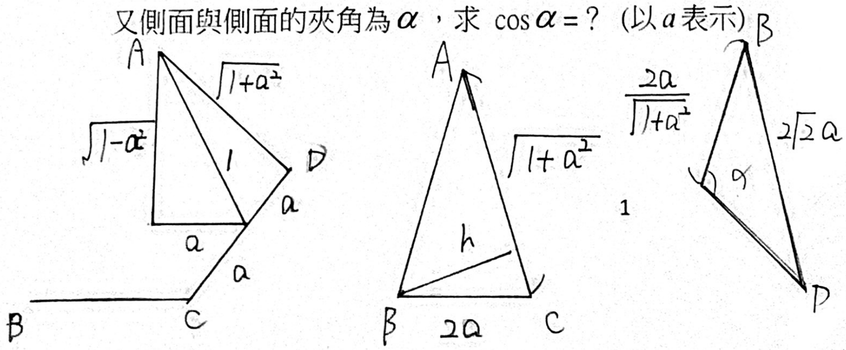
4. 有一個金字塔，如右圖，其中底面是正方形，
$-a^2$

四個側面是等腰三角形($\overline{AB}=\overline{AC}=\overline{AD}=\overline{AE}$)，



設金字塔的側面與底面之夾角為 θ ，且 $\tan\theta=\frac{\sqrt{1-a^2}}{a}$ ，

又側面與側面的夾角為 α ，求 $\cos\alpha=$? (以 a 表示)



$\cos\alpha=\dfrac{\frac{2a^2}{1+a^2}-\frac{2a^2(1+a^2)}{1+a^2}}{\frac{2a^2}{1+a^2}}$

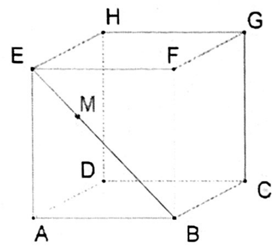
$=-a^2$

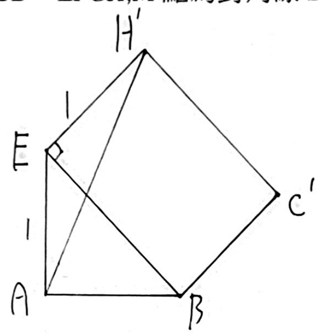
2024.7.31(三)
Ru

$\frac{1}{3}\ln 10$ 5. 設 $a_n=\sum_{k=1}^{3n}\frac{k^2}{3n^3+k^3}$,$n\in N$,求 $\lim_{n\to\infty}a_n$.

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{3n}\frac{\left(\frac{k}{n}\right)^2}{3+\left(\frac{k}{n}\right)^3}\to\int_0^3\frac{1}{x^3+3}dx=\frac{1}{3}\ln\left(x^3+3\right)\Big|_0^3=\frac{1}{3}\ln\left(\frac{30}{3}\right)=\frac{1}{3}\ln 10$$

$\sqrt{2+\sqrt2}$ 6. 如圖,邊長為 1 的正方體 $ABCD-EFGH$,M 點為對角線 BE 上一點,則$\overline{AM}+\overline{MH}$最小值為 ?

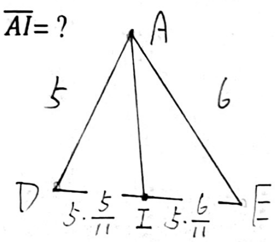




$$\left(1+1-2\cdot1\cdot1\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt2}\right)\right)^{\frac12}$$

$$=\sqrt{2+\sqrt2}$$

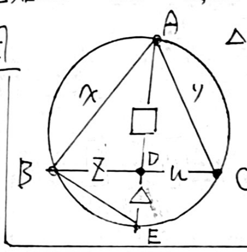
$\frac{24\sqrt5}{11}$ 7. I 為ΔABC 內心,D 在$\overline{AB}$邊上, E 在$\overline{AC}$邊上,且 D-I-E 三點共線,已知$\overline{AD}=\overline{DE}=5$,$\overline{AE}$=6,
則 $\overline{AI}$= ?



Schooten(斯霍騰)定理

$$\overline{AI}=\sqrt{\overline{AD}\cdot\overline{AE}-\overline{DI}\cdot\overline{IE}}$$

$$=\sqrt{5\cdot6}\cdot\sqrt{\frac{121-25}{11\cdot11}}=\frac{24\sqrt5}{11}$$



△ABE~△ADC

~BDE

$$\frac{\square+\triangle}{x}=\frac{y}{\square}$$

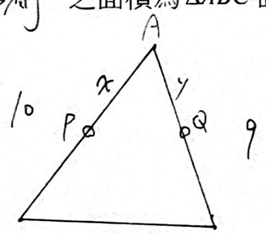
$\Rightarrow \square^2=xy-zu$

↑

□△

$\frac{15}{2}$ 8. 在ΔABC中,$\overline{AB}=10$, $\overline{AC}=9$, $\cos\angle BAC=\frac{3}{8}$。設點 P、Q分別在邊$\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 上使得ΔAPQ

98學測 之面積為ΔABC面積之一半,則$\overline{PQ}$之最小可能值為?



$$xy=\frac12\cdot10\cdot9=45$$

$$\overline{PQ}^2=x^2+y^2-2\cdot45\cdot\frac38\geq2\cdot45-2\cdot45\cdot\frac38=2\cdot45\cdot\frac58\Rightarrow\overline{PQ}\geq\frac{15}{2}$$

$\sqrt2$ 9. 已知正數a,b,c滿足$a+b+c=1$,試求$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}$之最小值

98高雄市聯招

106新竹高商

法1: 設 $Z_1=a+bi$, $Z_2=b+ci$, $Z_3=c+ai$, $|Z_1|+|Z_2|+|Z_3|\geq|Z_1+Z_2+Z_3|=|1+i|=\sqrt2$

法2: 設 $A(0,0)$, $B(a,b)$, $C(a+b,b+c)$, $D(a+b+c,a+b+c)$

$$\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}\geq\overline{AD}=\sqrt2$$

法3: $(a^2+b^2)(1^2+1^2)\geq(a+b)^2$ $\Rightarrow\frac{\sqrt2}{\sqrt2}\left(\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}\right)\geq\frac{2}{\sqrt2}=\sqrt2$

$(b^2+c^2)(1^2+1^2)\geq(b+c)^2$ 2

$(c+a)^2(1^2+1^2)\geq(c+a)^2$