113南湖

$\sqrt{218}$ **9.** 平面上，有一橢圓 $\Gamma:\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$ 和一直線 $L:x+y=10$，以 Γ 的兩焦點為兩焦點且過 L 上一點的所有橢圓中，長軸長的最小值為 ________。

$b^2=d(F_1,L)\cdot d(F_2,L)=\dfrac{13}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{7}{\sqrt{2}}=\dfrac{91}{2}$

$a^2=b^2+c^2=\dfrac{91}{2}+9=\dfrac{109}{2}$

$\Rightarrow 2a=\sqrt{218}$

$\sqrt{6}$ **10.** 已知在空間中有 $A(2,0,3)$、$B(-1,0,6)$、$C(4,0,3)$、$D(3,-2,2)$ 四點，一動點 P 在直線 $\overleftrightarrow{CD}$ 上，則 ΔPAB 面積的最小值為 ________。

$\overrightarrow{CD}\,/\!/\,(1,2,1)$

$\overrightarrow{AB}\,/\!/\,3(1,0,-1)$

設 $P(t+4,2t,t+3)$

$\begin{matrix} t+2 & 2t & t & t+2 & 2t & t \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \end{matrix}$

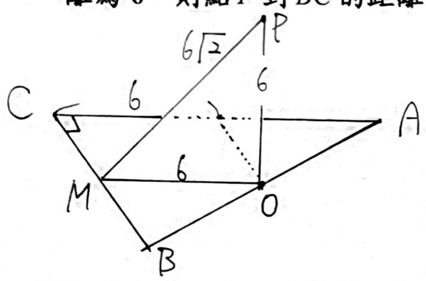
$-2t \quad 2t+2 \quad -2t$

$\Rightarrow 12t^2+8t+4$

$\left(\dfrac{-(\cancel{16}\overset{4}{\ }\cdot 4-\cancel{12}\cdot\cancel{4}\cdot 4)}{\cancel{4}\cdot\cancel{12}\ 3}\cdot 3\cdot 3\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\dfrac{1}{2}$

$=\sqrt{3\cdot 8}\cdot\dfrac{1}{2}=\sqrt{6}$

$6\sqrt{2}$ **11.** 設四面體 $P-ABC$ 中，$\overline{PA}=\overline{PB}=\overline{PC}$, $\overline{AC}=12$, $\angle ACB=90^\circ$，若點 P 到 ABC 所在平面的距離為 6，則點 P 到 $\overline{BC}$ 的距離為 ________。



924 **12.** 某項比賽到最後剩下甲、乙兩隊要進行冠軍爭奪戰，兩隊事先排定選手出戰順序，並已公布不可變更，冠軍爭奪戰方式如下：

(1)兩隊各派出 6 名選手，並按事先已排定順序進行 $\boxed{6\text{ 場}}$ 比賽。

(2)每場由兩隊依序派出一位選手比賽，並定出輸贏沒有平手。

(3)第一場由兩隊第一位選手對戰，輸的選手被淘汰，贏的一方繼續留在場上對戰對方的下一位選手。

(4)當有一隊的選手全部都被淘汰時，留在場上的一方即奪得冠軍。

(5)例如：甲隊第一位選手依序將乙隊第一位到第六位選手全部淘汰時，甲隊即奪得冠軍。

請問要產生冠軍的賽程(上述(5)中舉例，即是一種賽程)，一共有 ________ 種。

考慮甲勝 $\rightarrow x_1+x_2+\cdots+x_6=6$，$2\cdot H^6_6=C^{11}_5\cdot 2=\dfrac{11\cdot\cancel{10}\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{\cancel{5}\cdot 4\cdot 3\cdot\cancel{2}}\cdot 2$

$=924$

13. 已知甲、乙兩袋中各有大小相同的球 3 個：甲袋中有 2 個編號 1 的球和 1 個編號 2 的球，乙袋中有 1 個編號 1 的球和 2 個編號 2 的球。每次自某袋中隨機抽取 1 球後，若是編號為 1，則選擇甲袋繼續抽取 1 球，若是編號為 2，則選擇乙袋繼續抽取 1 球，惟每次抽取出來的球隨即放回原袋中；如此一直操作下去。今從甲袋開始第一次取球，並將第 n 次取到 2 號球的機率記為 $P(n)$，若以 n 表示 $P(n)=a+\frac{b}{3^n}$，則常數數對 $(a,b)=$ ______。

$\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$

甲 < $\frac{2}{3}$ ①, $\frac{1}{3}$ ②

乙 < $\frac{1}{3}$ ①, $\frac{2}{3}$ ②

$$P_n = \underset{(乙)}{\frac{2}{3}P_{n-1}} + \underset{(甲)}{\frac{1}{3}(1-P_{n-1})}$$

$$\Rightarrow P_n = \frac{1}{3}P_{n-1} + \frac{1}{3}$$

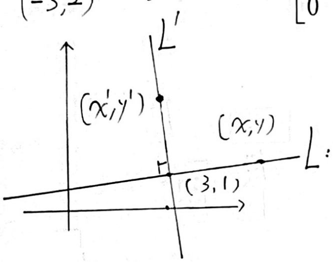
$$k = \frac{1}{3}k + \frac{1}{3} \Rightarrow k = \frac{1}{2}$$

$$P_n - \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\left(-\frac{1}{6}\right) \longleftarrow P_1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{3} - \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow P_n = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3}\right)^n\left(-\frac{1}{2}\right)$$

14. 已知線性變換 f 將過點 $(3,1)$ 的直線 L 映射到過點 $(3,1)$ 且與直線 L 垂直的直線，若線性變換 f 由矩陣 $A=\begin{bmatrix}2 & a\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ 表示，直線 L 的斜率為 m，則數對 $(a,m)=$ ______。

$(-3,1)$ or $(-3,2)$



$$(x'-3)+(y'-1)i = \big((x-3)+(y-1)i\big)\,t\,i = (-t)(y-1)+it(x-3)$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3-t(y-1)\\ 1+t(x-3)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-ty+t+3\\ tx-3t+1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & a\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2x+ay\\ y\end{bmatrix}$$

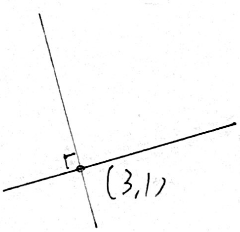
$$\Rightarrow \begin{cases}2x+(a+t)y = t+3\\ tx - y = 3t-1\end{cases} \Rightarrow \frac{2}{t} = \frac{t+3}{3t-1} = \frac{a+t}{-1}$$

$$\Rightarrow t^2-3t+2=0 \Rightarrow t=1 \text{ or } 2 \longrightarrow a=-3$$

$L': y'-1 = -\frac{1}{m}(x'-3)$

代入L'

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2x-3y\\ y\end{bmatrix}$$



$L: y-1 = m(x-3)$

$$-m(y-1) = (2x-3y-3)$$

$$\Rightarrow (3-m)\big(\underset{\uparrow\ y}{\boxed{m(x-3)+1}}-1\big) = 2x-3$$

$$\text{coef}(x) = (3-m)m = 2 \Rightarrow m^2-3m+2=0 \Rightarrow m=2 \text{ or } 1$$

#