臺北市立南湖高級中學 113 學年度第 1 次正式教師甄選

數學科試題

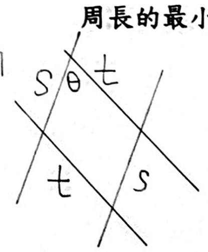
說明：
(1)本試卷共包含 14 題填充題，每題 5 分；3 題計算證明題，每題 10 分，共計 100 分。
(2)請將填充題答案填入答案紙上相應答案格內。
(3)答案須將整數乘開或分數化至最簡，答案正確且完整，才給分。

一、填充題 (14 題，每題 5 分)

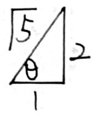
$2\sqrt{10}$

1. 設 a,b 為正數，已知直線方程式 $L_1:3x-y=0$ 、$L_2:3x-y=a$ 、$L_3:x+y=0$ 、$L_4:x+y=b$ 。若此四條直線所圍成的平行四邊形面積為 $\sqrt{5}$，則此平行四邊形周長的最小值為________。

解



$\tan\theta=\left|\dfrac{3-(-1)}{1+3(-1)}\right|=2$



$st\cdot\dfrac{2}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$

$\Rightarrow st=\dfrac{5}{2}$

$2\cdot(s+t)\geq 2\cdot\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\cdot 2$

$=2\sqrt{10}$ #

$\dfrac{7}{2}+\log_2 3$

2. 試求使 $(2^x-4)^3+(4^x-8)^3=(4^x+2^x-12)^3$ 成立之所有實數 x 之和為________。

$(t-4+t^2-8)^3-3(t-4)(t^2-8)(t-4+t^2-8)=(t^2+t-12)^3$

$\begin{matrix} t & +4 \\ t & -3 \end{matrix}$

$\Rightarrow (2^x-4)(4^x-8)(2^x-3)(2^x+4)=0$

$2+\dfrac{3}{2}+\log_2 3=\dfrac{7}{2}+\log_2 3$

225

3. 設數列 $\langle a_n\rangle$ 滿足 $a_1=1$ ，$a_2=2$ ，$a_3=1$ ，且對於每一個自然數 n ，$a_na_{n+1}a_{n+2}\neq 1$

又 $a_na_{n+1}a_{n+2}a_{n+3}=a_n+a_{n+1}+a_{n+2}+a_{n+3}$ ，則 $\sum\limits_{k=1}^{113}a_k=$________。

$a_{n+3}=\dfrac{a_n+a_{n+1}+a_{n+2}}{a_na_{n+1}a_{n+2}-1}$

$8\times 28+1=225$

$1,2,1,4,1,2,1,4,\cdots$

$113=4\times 28+1$

2024.7.28(日)

~7.29(一) Ru

$\frac{29}{3}$ **4.** 試計算 $\log_8(\tan 1^\circ+\sqrt{3})(\tan 2^\circ+\sqrt{3})(\tan 3^\circ+\sqrt{3})\ldots\ldots(\tan 29^\circ+\sqrt{3})$ 之值為＿＿＿＿。

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

$$\tan 1^\circ\tan 29^\circ+\boxed{(\tan 1^\circ+\tan 29^\circ)\sqrt{3}}=4$$

$$(1-\tan 1^\circ\tan 29^\circ)\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\sqrt{3}$$

1 , 29
2 , 28
⋮
14 , 16
15 , 15

$$4^{14}\cdot 2=2^{29}\Rightarrow\frac{29}{3}$$ #

3 **5.** 將 7^{2024} 除以 13 後，得餘數為＿＿＿＿。

Fermat's little theorem $\quad 7^{12}\equiv 1 \pmod{13}\quad 7^2\equiv 49\equiv 10\equiv -3 \pmod{13}$

$$\begin{cases}P\text{ is prime}\\(a,p)=1\end{cases}\Rightarrow a^{p-1}\equiv 1 \pmod p$$

$$7^{2024}\equiv 7^{12\times 168+8}\equiv 7^8\equiv(-3)^4\equiv 81\equiv 3 \pmod{13}$$

x^3-x **6.** 設 $f(x)$ 為首項係數為 1 的實係數多項式函數，對任意實數 x，$(x-1)f(x+1)=(x+2)f(x)$ 恆成立，則 $f(x)=$＿＿＿＿。

$x=-2\Rightarrow f(-1)=0$
$x=-1\Rightarrow f(0)=0$
$x=0\Rightarrow f(1)=0$

令 $f(x)=(x-1)x(x+1)Q(x)$

$\Rightarrow (x-1)x(x+1)(x+2)Q(x+1)$
$=(x+2)(x-1)x(x+1)Q(x)$
$\Rightarrow Q(x)=Q(x+1)$
$\Rightarrow Q(x)$ is constant
$\Rightarrow f(x)=x^3-x$

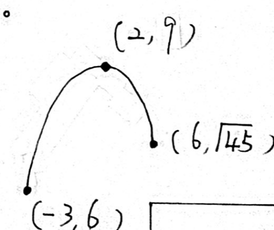
$(9,6)$ **7.** 若函數 $f(x)=\sqrt{24-4x}+\sqrt{5x+15}$（其中 $-3\le x\le 6$）的最大值為 M，最小值為 m，則數對 $(M,m)=$＿＿＿＿。

$$f'(x)=\frac{-4}{2\sqrt{24-4x}}+\frac{5}{2\sqrt{5x+15}}=0$$

$\Rightarrow 180x=360$

$\Rightarrow x=2$

x		2	
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	9	$\searrow$



$(6-x+x+3)(4+5)\ge(f(x))^2$

$\Rightarrow M=9$, "=" 成立條件

$$\frac{6-x}{4}=\frac{x+3}{5}$$

$\Rightarrow x=2$

$x<2$ or $x>2+2\log 2$ **8.** 解不等式 $\log(10^x+200)>\frac{x}{2}+1+\log 3$，得解為＿＿＿＿。

$10^x+200>10^{\frac{x}{2}}\cdot 30$

$t^2-30t+200>0$

$t\quad -20$
$t\quad -10$

$10^{\frac{x}{2}}>20$ or $10^{\frac{x}{2}}<10$

$\Rightarrow x>2+2\log 2$ or $x<2$