臺中市立文華高級中等學校 113 學年度第 1 次教師甄選

數學科專業知能試題本

測驗說明：

一、本測驗分成二大題：填充題(80 分)及計算題(20 分)。

二、填充題作答說明：請將正確答案填入正確的題格中，分式須化至最簡，根式須有理化，否則不予計分，全對才給分，不需計算過程。

三、計算題作答說明：請自行標清楚題號再作答，須詳列計算過程或說明理由。

四、另附一張 A3 計算紙，可供計算或打草稿，請勿用答案卷正反面打草稿。計算紙上方請書寫准考證號碼，並於考試完畢隨試題收回。

一、填充題：(共 80 分)

Ⅰ.填充一(每格 4 分，共 32 分，每格全對才給分。)

1. x^{2024} 除以 $\left(x^2+1\right)\left(x-1\right)^2$ 所得的餘式為___________。

2. 設有一數列 $<a_n>$ 滿足 $\begin{cases} a_1=1 \ , \ a_2=2 \\ a_n=\dfrac{a_{n-1}+a_{n-2}}{2}\left(n\geq 3, n\in N\right) \end{cases}$，則 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=$___________。

3. 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle C=90^0$，以 $\overline{AB}$，$\overline{AC}$ 為邊向外做正三角形 $\triangle ABP$ 及 $\triangle ACQ$。設 M 為 $\overline{BC}$ 中點，若 $\overline{MP}=18$，$\overline{MQ}=14$，則線段 $\overline{BC}=$___________。

4. 已知 ΔABC 中，$\overline{AB}=5$、$\overline{BC}=7$、$\overline{AC}=6$，D 為 $\overline{BC}$ 上的動點，自 D 作 $\overline{AB}$、$\overline{AC}$ 的垂線，垂足分別為 E、F，則 $\overline{EF}$ 的最小值為___________。

5. 以定點 O 為圓心，半徑為 2 的圓上有兩點 A、B，已知對於任意實數 t，$\left|(1-t)\overrightarrow{OA}+2t\overrightarrow{OB}\right|\geq\sqrt{2}$ 恆成立，則 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ 的範圍為___________。

6. 定積分 $\int_{-1}^{7}(-2+\sqrt{-x^2+6x+7})dx=$___________。

7. 為慶祝文華高中校慶，高二專題「手談算學」班的同學在圍棋棋盤上用 17 顆黑色棋子排出「文」字，今把這 17 顆棋子的位置坐標化分別為 $(-3,0)$ 、$(-2,0)$ 、$(2,0)$ 、$(3,0)$ 、$(-1,1)$ 、$(1,1)$ 、$(0,2)$ 、$(-1,3)$ 、$(1,3)$ 、$(-3,4)$ 、$(-2,4)$ 、$(-1,4)$ 、$(0,4)$ 、$(1,4)$ 、$(2,4)$ 、$(3,4)$ 、$(0,5)$ ，若這 17 個點可以決定 m 條不同的直線及 n 個不同的三角形，則 $m+n=$ ＿＿＿＿＿＿。

8. 滿足 $(3|x|+4|y|-10)(4|x|+3|y|-10)(x^2+y^2-4)\le 0$ 之所有 (x,y) 所成圖形的面積為＿＿＿＿＿。

Ⅱ.填充二(每格 6 分，共 48 分，每格全對才給分)

9. 已知 $\langle a_n \rangle$ 為首項 $a_1=1$ 、公差 $d>0$ 的等差數列，若 $\dfrac{1}{a_1a_2}+\dfrac{1}{a_2a_3}+\dfrac{1}{a_3a_4}+......+\dfrac{1}{a_{112}a_{113}}$ 為整數，則公差 d 的最小的可能值為＿＿＿＿＿＿。

10. 函數 $f(x)=\sqrt{2x^2-6x+9}+\sqrt{2x^2-16x+\left(\log_3 x\right)^2-2x\cdot\log_3 x+4\cdot\log_3 x+40}$ 的最小值為 ＿＿＿＿＿＿。

11. 設 $P=\sum_{k=1}^{1000} k\cdot C_K^{1000}$ ，其中 P 的最高位數字為 a ，個位數字為 b ，且 P 的整數位數為有 c 位數。若 z 、 w 為複數，滿足 $z=a+bi$ ，以及 $|w+7+5i|=1$ ，則 $|z-w|+c$ 的最小值為＿＿＿＿＿。

12. 將“ 1：2：3 ”適度添加括號後，可得兩種不同結果之比值，如：

① $1:(2:3)=1:\dfrac{2}{3}$ ，其比值為 $\dfrac{3}{2}$

② $(1:2):3=\dfrac{1}{2}:3$ ，其比值為 $\dfrac{1}{6}$

將“ 1：2：3：4 ”適度添加括號後，則**有多種**不同結果之比值，其中**某兩種(舉例)**如下：

① $(1:2):(3:4)=\dfrac{1}{2}:\dfrac{3}{4}$ ，其比值為 $\dfrac{2}{3}$

② $1:((2:3):4)=1:(\dfrac{2}{3}:4)=1:\dfrac{1}{6}$ ，其比值為 6

按照上述方法，將“ 1：2：3：4：5：6：7：8 ”適度添加括號後，使其產生出一比值，則最多會有＿＿＿＿＿種不同之比值。

13. 矩陣$A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$、$B=\begin{bmatrix}\sqrt{3} & -1\\ 1 & \sqrt{3}\end{bmatrix}$、$I=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$，若$\alpha$、$\beta$、$\gamma$皆為正整數，且

$A^{\alpha}B^{\beta}=2^{8-\gamma}I$，則序組$(\alpha,\beta,\gamma)$=___________。

14. 試求$1^2C_1^{16}\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^{15}+2^2C_2^{16}\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^{14}+3^2C_3^{16}\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)^{13}+\ldots+16^2C_{16}^{16}\left(\frac{1}{4}\right)^{16}=$___________。

15. 坐標平面上有兩定點$A(-1,0)$、$B(1,1)$，P為橢圓$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$上一點，則$2\overline{PA}+\overline{PB}$的最小值為___________。

16. 空間中三點P、Q、R分別在直線$L_1:\frac{x-3}{1}=\frac{y-6}{2}=\frac{z+1}{-2}$、$L_2:\frac{x-2}{-2}=\frac{y-7}{2}=\frac{z-4}{1}$、

$L_3:\frac{x-1}{2}=\frac{y-5}{1}=\frac{z-6}{2}$上，則$\overline{PQ}+\overline{PR}$的最小值為___________。

臺中市立文華高級中等學校 113 學年度第 1 次教師甄選
數學科專業知能試題本

二、計算題：（共 20 分） （記憶版）

1. ΔABC 為一圓的內接正三角形，P 為圓上任一點，試證：

   (1) $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2$ 的值與 P 點的位置無關。（3 分）

   (2) $\overline{PA}^4+\overline{PB}^4+\overline{PC}^4$ 的值與 P 點的位置無關。（4 分）

2. 設一直角三角形之周長為 a，試求此三角形斜邊長之範圍。（7 分）

3. 試用三種不同的方法證明下列性質：

   若平面上三相異直線 $a_1x+b_1y+c_1=0$、$a_2x+b_2y+c_2=0$、$a_3x+b_3y+c_3=0$ 共點，

   則 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=0$。（每種證法 2 分，共 6 分）