[cut6997] $\boxed{7}$ $\boxed{R}$ $^{\vee}R^{\vee}R^{\vee}R^{\vee}R$ $\boxed{R}$ $P(\text{中間独立紅})=\left(\frac{10}{14}\right)^2$ $np=4\times\left(\frac{10}{14}\right)^2$

$P(\text{頭尾独立紅})=\frac{10}{14}$ $np=2\times\left(\frac{10}{14}\right)$) 和 $=\frac{170}{49}$ #

$\frac{170}{49}$ 出第 6 次紅球為止。抽球過程中，若某次抽到紅球，且其前後的抽取結果均非紅球，則稱它為「獨立紅」。舉例來說，「白紅紅白藍藍紅紅黑白紅藍白紅」是一種可能的抽球過程，其中出現的第 5、6 次紅球都是獨立紅。求抽球過程中，「獨立紅」出現次數的期望值為＿＿＿＿。

$\boxed{8}$ $\frac{C^x_2}{C^{x+y}_2}=\frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ $x^2-(2y+1)x-(y^2-y)=0$ 令 $k=\sqrt{8y^2+1}$ $\Rightarrow k^2-8y^2=1$ (pell's equation)

$2x(x-1)=(x+y)(x+y-1)$ $\Rightarrow x=\frac{1}{2}\left(2y+1+\sqrt{8y^2+1}\right)$ 令 $z=k+2\sqrt{2}y$, $\bar{z}=k-2\sqrt{2}y$, $N(z)=z\bar{z}=1$

$(k_0,y_0)=(3,1)$

8. 南港高工全校有男、女生各若干人，其中男生人數介於100到1000人之間。已知若從全校學生中任選兩人，則兩人均為男生的機率恰為$\frac{1}{2}$，則全校男生共有 493 人。 [Ellipse]

$z=(3+2\sqrt{2})^n$, $\bar{z}=(3-2\sqrt{2})^n$

n	1	2	3	4
z	$3+2\sqrt{2}$	$17+12\sqrt{2}$	$99+70\sqrt{2}$	$577+408\sqrt{2}$
(k,y)	$(3,1)$	$(17,6)$	$(99,35)$	$(577,204)$

當 $n=4$, $x=204+\frac{578}{2}=493$

二、計算、證明與論述題(共 44 分)

$\boxed{1}$ (1) $P_{10}(x)=\left(\left(\left(\left(\left(\left(\left(\left((x^2-2)^2-2\right)^2-2\right)^2-2\right)^2-2\right)^2-2\right)^2-2\right)^2-2\right)^2-2\right)^2-2$

1. 對於任意正整數n，定義多項式函數$\begin{cases}p_1(x)=x^2-2\\ p_{n+1}(x)=(p_n(x))^2-2\end{cases}$，請回答下列問題：

2, −2 (1) 設$x\in(-2,2)$，求$p_{10}(x)$的最大值與最小值。(6 分)

$P_{10}'(x)=(2x)\left(2(x^2-2)\right)\left(2((x^2-2)^2-2)\right)\cdots\left(2(\ \ )\right)=0$

根：0, $\pm\sqrt{2}$, …… …… $\alpha,\beta,\ldots$

min $=f(\alpha)=f(\beta)=\cdots=-2$

1024 (2) 求$p_{10}(x)=0$之相異實根個數。(3 分) (2) $2^{10}=1024$

$\boxed{1}$ (3) $P_2(x)=(x^2-2)^2-2=0$

(3) 若定義α_n是$p_n(x)=0$的最大實根(舉例來說，$\alpha_1=\sqrt{2}$)，請證明對於所有正整數n，$\alpha_n<\alpha_{n+1}<2$恆成立。(8 分)

max $=f(0)=2$

$a_n=\sqrt{2+a_{n-1}}$ 設 $a_{n-1}<2$, $n\geq2$ 故

$a_2=\sqrt{2+\sqrt{2}}\Rightarrow\cdots\Rightarrow a_n=\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots\sqrt{2}}}$ (n個根号) "有上界2" 則 $a_n=\sqrt{2+a_{n-1}}<\sqrt{2+2}=2$, $\forall n\in\mathbb{N}$, $a_n<2$ (by M.I.)

遞增 "$a_{n+1}>a_n$"

pf: $a_{n+1}^2-a_n^2=2+a_n-a_n^2$

$=-(a_n-2)(a_n+1)>0$

$(\because\forall n\in\mathbb{N},\ a_n>0>-1)$

$\Rightarrow\forall n\in\mathbb{N},\ a_{n+1}>a_n$

2. 設實數a、b滿足$a\geq b>0$且$ab=2$，請回答下列問題：

4, $(\sqrt{3}+1,\sqrt{3}-1)$ (1) 求$\frac{a^2+b^2}{a-b}$的最小值，以及此時的數對(a,b)。(4 分)

max 無 min $=9\sqrt{2}$ $(\sqrt{2},\sqrt{2})$ (2) 求$5a+4b$的最大值與最小值，以及此時的數對(a,b)。(4 分)

max 無 min $=4\sqrt{10}$ $\left(\frac{\sqrt{10}}{2},\frac{2\sqrt{10}}{5}\right)$ (3) 求$4a+5b$的最大值與最小值，以及此時的數對(a,b)。(4 分)

(4) 承上題，請寫出學生在解第(3)小題時，常見的錯誤類型或迷思概念。(4 分)

3. 在數學「直線與圓」單元中提到，坐標平面上一點$P(m,n)$到直線$L:ax+by+c=0$的距離$d(P,L)=\left|\frac{am+bn+c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|$。請回答下列問題：

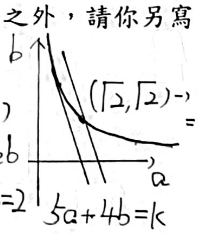
$\boxed{2}$ (1) $\frac{(a-b)^2+2ab}{a-b}=a-b+\frac{4}{a-b}\geq4$

(1) 請以高職一年級學生的先備知識為基礎證明上式。(5 分)

(2) 現有一道問題「求平面上一點$P(1,2)$到直線$L:x+y=-3$的距離。」除了使用「點到直線的距離」公式之外，請你另寫出 2 種給高職二年級學生的解答。(6 分)

$\begin{cases}a-b=2\\ ab=2\end{cases}\xrightarrow{\times a}a^2-2a-2=0\Rightarrow a=\sqrt{3}+1$, $b=\sqrt{3}-1$

(2) $\begin{cases}a\geq b\\ ab=2\end{cases}$



(3) 設切点 $P\left(s,\frac{2}{s}\right)$ $y=\frac{2}{x}\Rightarrow m=\frac{-2}{s^2}=\frac{-4}{5}\Rightarrow 2s^2=5\Rightarrow P\left(\frac{\sqrt{10}}{2},\frac{2\sqrt{10}}{5}\right)$

min $=4\left(\frac{\sqrt{10}}{2}\right)+2\sqrt{10}=4\sqrt{10}$