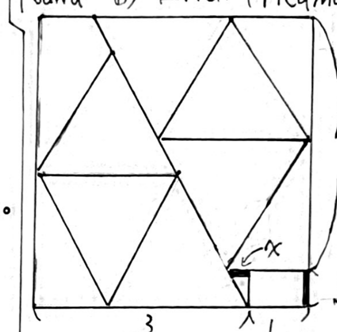
臺北市立南港高工113學年度第1次教師甄選筆試命題試題紙

甄選科別：一般類科　　　科目：數學科

Found by Erich Friedman in 1996



作答說明

1. 請使用藍、黑原子筆，並於答案卷作答。
2. 填充題答案若為分數或根式，請化至最簡。
3. 計算、證明與論述題請標明題號及子題號，標示不清者不予計分。

一、填充題(每題 7 分，共 56 分)

1. 若整數 n 可使 $\dfrac{n^3+2024}{n+11}$ 亦為整數，則 n 的最大值為__________。

682

$\boxed{1}$ $(n+11) \mid (n^3+11^3)-(n^3+2024)$ 　 $\begin{array}{r}2024\\-1331\\\hline 693\end{array}$ $\Rightarrow (n+11) \mid 693 \Rightarrow 682$

$\boxed{2}$ $2-x=\sqrt{3}+\sqrt{3}x$

$\Rightarrow x=\dfrac{(2-\sqrt{3})(\sqrt{3}-1)}{2}$

$=\frac{1}{2}(-5+3\sqrt{3})$

2. 平面上，在一個正方形內部(含邊界)放入6個邊長為1的正三角形，使得這6個正三角形的內部區域彼此互不重疊，則此正方形的邊長最小值為__________。

$\frac{9-3\sqrt{3}}{2}$

$2-x=\frac{1}{2}(9-3\sqrt{3})$

3. 甲乙丙丁戊己庚辛壬癸等10人排成一列先後上台，若甲、乙都比丙、丁、戊先上台，且庚比辛先上台，則這10人共有__________種不同的上台順序。

181440

$\boxed{3}$ $\dfrac{10!}{5!\,2!}\cdot 2!\,3!=181440$

考慮 x,y,x,y,x,y,x,y,x

$\boxed{5}$ $(x^2+y^2)(5^2+4^2)\geq(5x+4y)^2 \Rightarrow M=\sqrt{123}$

4. 滿足 $\int_{k^2}^{k^4}(x-\sqrt{101})dx=0$ 的相異實數 k 共有__________個。

5

$\boxed{4}$ $\left(\frac{1}{2}x^2-\sqrt{101}\,x\right)\Big|_{k^2}^{k^4}=0$

$k^8-k^4=k^4(k^2+1)(k+1)(k-1)$ 　 $k^2(k+1)(k-1)\boxed{(k^4+k^2-2\sqrt{101})}=0$ 　共5個

$k^4-k^2=k^2(k+1)(k-1)$ 　 令 $t=k^2$，$t^2+t-2\sqrt{101}=0$ → $D>0$，$\alpha+\beta<0$，$\alpha\beta<0$，$+\ -$ $\Rightarrow \square=0$ 2實根 2虛根

5. 數列 $\{a_n\}$ 由9項非負實數構成，且對於 $i=1,2,3,\ldots,8$，恆有 $a_i^{\,2}+a_{i+1}^{\,2}\leq 3$。若 $\sum_{i=1}^{9}a_i$ 的最大值為 M、最小值為 m，則數對 (M,m) 為__________。

$\boxed{5}$ $(\sqrt{123},0)$

$M\leq\sqrt{3\cdot 8\cdot\frac{11}{2}}=\sqrt{132}$

$(a_1^2+2(a_2^2+\cdots+a_8^2)+a_9^2)\left(1^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+1\right)\geq(\ )^2$

"=" 成立 $\Leftrightarrow a_1=2a_2=2a_3=\cdots=2a_8=a_9$

$\Rightarrow (a_1,a_2,\ldots,a_9)=\left(\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}},\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}},\ldots,\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\right)$ 不合

6. 設二次函數 $y=x^2-6x+5$ 的圖形交 x 軸於 A、B 兩點，P 是直線 $x+y=-4$ 上的動點。當 $\angle APB$ 有最大值時，ΔABP 的外心坐標為__________。

$(3,7-3\sqrt{10})$

$\overline{OA}=d(O,L)$ 　 $\Rightarrow k^2-14k-41=0$ 　 $\Rightarrow (3,7-3\sqrt{10})$

$\boxed{6}$ $\Rightarrow k^2+4=\frac{1}{2}(k+7)^2$ 　 $\Rightarrow k=7-3\sqrt{10}$ 　 $(k<0)$

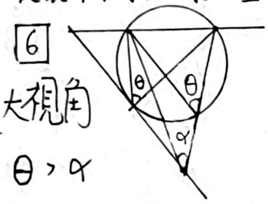
#

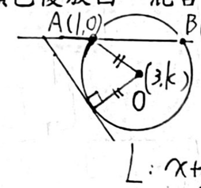
7. 不透明袋中有黑球2顆、白球3顆、紅球4顆、藍球5顆，每球被抽到機率均等。現每次從袋中任抽一球，登記顏色後放回，混合均勻後再抽一次，如此反覆進行下去，直到抽

$\frac{170}{49}$

$\boxed{6}$

說明　最大視角　$\theta>\alpha$





$L: x+y=-4$

2024.7.26(五)～7.26(六)

Ru