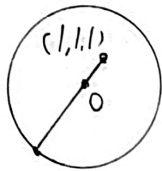


12. 求在球面上 $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ 距離點 $(1, 1, 1)$ 最遠的點是 $(-\sqrt{3}, -\sqrt{3}, -\sqrt{3})$ 。



$r(t, t, t)$

取負

$$t^2 \cdot 3 = 9 \Rightarrow t = -\sqrt{3}$$

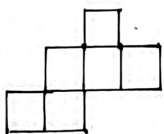
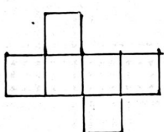
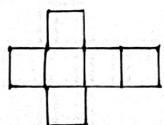
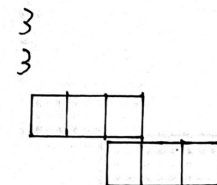
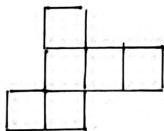
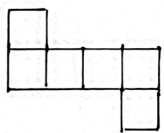
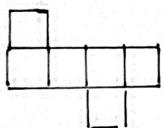
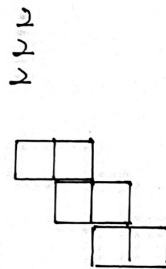
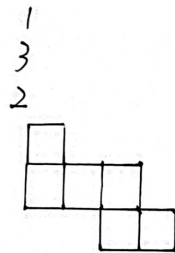
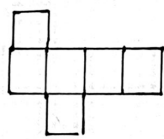
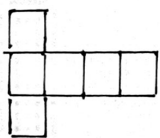
$$\Rightarrow (-\sqrt{3}, -\sqrt{3}, -\sqrt{3})$$

13. 滿足 $x \geq 4, y \geq 5, z \geq 3$, 方程 $x + y + z = 24$ 有多少組 91 整數解。

$$H_{12}^3 = C_2^{14} = 91$$

14. 在立方體的展開圖裡，有多少個 11 不同形狀(不能相疊重合)。

1
4
1



好窩~

15. 設 $\tan\alpha, \tan\beta$ 是 $5x^2 - 3x - 1 = 0$ 的兩根, 求 $\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}$ 的值是 $\frac{3}{4}$ 。

$$\boxed{15} \quad \frac{\sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta}{\cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta} = \frac{\frac{3}{5}}{1 + (\frac{-1}{5})} = \frac{3}{4}$$

16. 平面上有 8 個圓, 其中每兩個圓相交且任三個圓不通過同一點, 這 8 個圓將平面分成幾部分 58 。

一維: 直線上 n 條直線最多將此直線分割成 $1+n$ 個區域
 二維: 1 (初始) + 直線數 + 交點數 = $1 + C_1^n + C_2^n$
 三維: 1 (初始) + 平面數 + 交線數 + 交點數
 = $1 + C_1^n + C_2^n + C_3^n$
 多一個交點, 多一個區域

16
 $2 + C_2^8 \cdot 2 = 58$

圓上任取 n 條直線最多將此圓內部分成 $1 + C_2^n + C_3^n$ 個區域
 1 (初始) + 弦數 + 圓內交點數
 = $1 + C_2^n + C_3^n$

凸 n 邊形的對角線 \sim \sim
 $\Rightarrow 1 + C_2^n + C_3^n - n$

二、計算題：共 2 題，每題 10 分

1. 設二階方陣 $A = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & 1 \\ -\frac{2}{3} & -1 \end{bmatrix}$ 且 $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$,

(1) 設 $k \in \mathbb{R}$, 且矩陣 A 滿足 $A(A - I_2) = k(A - I_2)$, 試求 k 值。

(2) 設 n 為自然數, 利用(1)的結果, 試求 $\lim_{n \rightarrow \infty} A^n$ 。

2. 試求曲線 $(x - y)^2 = \sqrt{2}(x + y)$ 被直線 $x + y = 4\sqrt{2}$ 截出區域的面積。

