國立中科實驗高級中學 113 學年度第 1 次教師甄選

2024.7.24(三) 凱米颱風

~7.25(四) Ru.

雙語部-數學科專業知能試題

一、填充題：共 16 題，每題 5 分

寸絲

1. 若△ABC 三邊長均為整數，且各邊邊長均不大於100，則有<u>87125</u>個不全等的三角形。好難～

Step1:(All)

3異 C^{100}_3

恰2同 $C^{100}_2 \cdot 2$

3同 100

和 171700

Step2:(不合)

w.l.o.g. 設 $a \le b \le c$

當 $a+b \le c \le 100$ 時

無法構成△

令 $n = a+b$

而 $a+b=n$ 的

組合數為 $\left[\frac{n}{2}\right]$

$\left[\frac{n}{2}\right]$	$a+b$	c	
1	2	2-100	1×99
	3	3-100	1×98
2	4	4-100	2×97
	5	5-100	2×96
			⋮
49	98	98-100	49×3
	99	99-100	49×2
50	100	100	50×1

$1\times(197)+2\times(193)+\cdots 49\times5$

$=\sum_{k=1}^{49} k(-4k+201)$ ← $(197+(k-1)(-4))$

$=-4\cdot\frac{49\cdot50\cdot99}{6}+201\cdot\frac{49\cdot50}{2}$

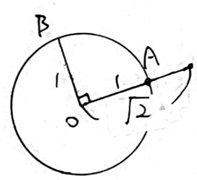
$\Rightarrow 171700-(-161700+246225)-50$

$=87125$

2. 設平面上有不共線的 O, A, B 相異三點，已知 $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$、$\left|\overrightarrow{OA}\right|=\left|\overrightarrow{OB}\right|=1$，且

$\overrightarrow{OP}=(\cos\theta-\sin\theta)\overrightarrow{OA}+(\cos\theta+\sin\theta)\overrightarrow{OB}$，$0\le\theta\le2\pi$，則 P 點在平面上所圍成的區域面積為<u>2π</u>。

$\cos\theta-\sin\theta$, $\cos\theta+\sin\theta$ 皆 $\le\sqrt{2}$



$P\in\Gamma: x^2+y^2=(\sqrt{2})^2$

$\Rightarrow \pi(\sqrt{2})^2=2\pi$

3. △ABC 中，若滿足 $\frac{\sin A+\sqrt{3}\cos A}{\cos A-\sqrt{3}\sin A}=\tan\frac{7\pi}{12}$，則 $\sin 2B+2\cos C$ 的最大值為<u>$\frac{3}{2}$</u>。

$\tan(A+60^\circ)=\tan105^\circ$

$\Rightarrow \angle A=45^\circ$

$\Rightarrow \angle C=135^\circ-\angle B$

$2\sin B\cos B+2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos B+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin B\right)$ 令 $S-C=k$

$\Rightarrow 1-2SC=k^2$

$=\sqrt{2}(S-C)+2SC$

$=1-k^2+\sqrt{2}k \xrightarrow{\text{微分}} -2k+\sqrt{2}=0$

$k=\frac{1}{\sqrt{2}}$ 代入 $\Rightarrow 1-\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$

4. 求值：$\sum_{n=1}^{25}\left(\frac{1}{1\times2+2\times3+3\times4+4\times5+\cdots+n(n+1)}\right)=$ $\frac{175}{234}$ 。

$Q_n = \sum_{k=1}^{n} k(k+1)$

$= \sum_{k=1}^{n} \frac{k(k+1)(k+2)-(k-1)k(k+1)}{3}$

$= \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$ (113 竹中)

$\frac{1}{Q_n} = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$

$\Rightarrow \frac{3}{2}\left(\frac{1\times13\times27}{1\times2\times13\times27} - \frac{1}{26\times27}\right)$

$= \frac{\cancel{3}}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{350}\ 175}{26\cdot\cancel{27}\ 9} = \frac{175}{234}$

5. 已知 x 為實數，則 $f(x)=\frac{4x^2-24x+121}{\sqrt{x^2-6x+10}}$ 的最小值為 36 。

令 $t = x^2-6x+10$

$\because D = 36-40<0$

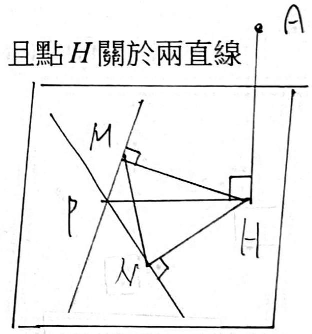
$\therefore t$ 恆 >0

$\frac{4t^2+81}{t}$

$= 4t+\frac{81}{t}$

$\ge 2\cdot2\cdot9 = 36$

6. 已知空間中兩直線 $L_1: 2x=4y-4=2z-3$ 、 $L_2: \frac{3}{2}x+3=6-y=12-3z$ 同時落在一平面 E 上，若平面 E 外有一點 $A(2,-\frac{1}{2},-\frac{3}{2})$ ，其中點 A 關於平面 E 的投影點為點 H ，且點 H 關於兩直線 L_1 、 L_2 的投影點分別為 M 、 N ，則線段 $\overline{MN}=$ $\frac{10\sqrt{70}}{21}$ 。



$\overrightarrow{L_1} // (\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}) // (2,1,2)$

$\overrightarrow{L_2} // (\frac{2}{3}, -1, -\frac{1}{3}) // (2,-3,-1)$

$L_1: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-\frac{3}{2}}{2} \overset{令}{=} t$

$L_2: \frac{x+2}{2} = \frac{y-6}{-3} = \frac{z-4}{-1}$

設交點 $P(2t, t+1, 2t+\frac{3}{2})$

$\frac{2t+2}{2} = \frac{t-5}{-3} = \frac{2t-\frac{5}{2}}{-1}$

$\Rightarrow t=\frac{1}{2} \Rightarrow P(1,\frac{3}{2},\frac{5}{2})$

$$\begin{array}{c|cccc|c} 2 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & -1 & 2 & -3 & -1 \\ & & 5 & 6 & -8 & \end{array}$$

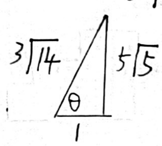
$\Rightarrow E: 5x+6y-8z+6=0$

$\overline{AH} = d(A,E) = \frac{25}{5\sqrt{5}} = \sqrt{5}$

$\overline{AP}^2 = 1+4+16 = 21$

$\Rightarrow \overline{PH} = \sqrt{21-5} = 4 = 2R$

$|\cos\theta| = \frac{|4-3-2|}{3\sqrt{14}} = \frac{1}{3\sqrt{14}}$



$\frac{\overline{MN}}{\sin\theta} = 2R$

$\Rightarrow \overline{MN} = 4\cdot\frac{5\sqrt{5}}{3\sqrt{14}}$

$= \frac{10\sqrt{70}}{21}$