新竹中學 113 學年度教師第一次教師甄試數學科題目卷

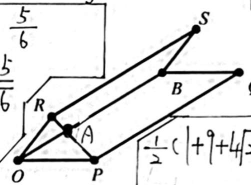
一、填空題：12 格，每格 6 分

1. 設雙曲線 $\Gamma: \frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{2}=1$ 兩焦點 F_1, F_2，以及 Γ 上一點 $P(3,-2)$。若以 P 點為切點的切線交 x 軸於點 Q，且 $\angle F_1PQ=\theta$，試求 $\tan\theta=$？ $\frac{\sqrt{5}}{5}$

2024.7.22(一)～7.23(二) 星巴克 Ru

2. 三角形 ΔABC 中，三頂點 A,B,C 對面的三邊長分別為 a,b,c。若 $a+c=2b$，且角 $A-C=\frac{\pi}{3}$，試求 $\cos B=$ ____$\frac{5}{8}$____。

3. 如圖，設平行四邊形 $OPQB$ 的面積為 28，平行四邊形 $ORSB$ 的面積為 14，以及三角形 ΔOPR 的面積為 7。



若 $\overrightarrow{OB}=x\overrightarrow{OP}+y\overrightarrow{OR}$，則數對 $(x,y)=$ $(1,2)$

4. 同時擲兩粒公正骰子，求點數和為 5 比點數和為 7 先出現的機率為何？____$\frac{2}{5}$____

5. 設 P 是正方形 ABCD 內部一點，且 P 到 A、B、C 三頂點的距離分別為 1、2、3，求此正方形的面積 $5+2\sqrt{2}$

6. $f(x)=\sqrt{4-3x}+\sqrt{2x-1}$，$\frac{1}{2}\le x\le\frac{4}{3}$，當 $x=\alpha$ 時，$f(x)$ 有最大值 M，求數對 $(\alpha,M)=$ $\left(\frac{5}{6},\frac{5}{6}\sqrt{6}\right)$

7. 已知實係數二次方程式 $x^2-ax+b=0$ 有兩實根 α,β 滿足 $-1\le\alpha\le0$ 且 $1\le\beta\le2$，若 a^2+b^2 有最大值 M 與最小值 m 則數對 $(\mathrm{M},m)=$____$\left(5,\frac{1}{2}\right)$____。

8. 設有 5 個二維數據，其統計資料如下：$\mu_x=2$，$\mu_y=8$，$\sum_{i=1}^{5}x_i^2=30$。如果小毅在求 y 對 x 的迴歸直線方程式時，不慎將斜率公式誤植為 $\frac{\sum_{i=1}^{5}(x_i+\mu_x)(y_i+\mu_y)}{\sum_{i=1}^{5}(x_i+\mu_x)^2}$，求得斜率為 $\frac{10}{3}$，其餘計算沒有錯誤，則正確的迴歸直線方程式為 $y-8=-2(x-2)$

(其中 μ_x 為 x 的算術平均數，μ_y 為 y 的算術平均數)

9. 設四面體 $ABCD$ 中，$A(2,3,6)$, $B(6,2,3)$, $C(3,6,2)$，$\overline{DA}=\overline{DB}=\overline{DC}$ 且兩直線 $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ 的距離為 $\frac{13}{\sqrt{10}}$，求頂點 D 的座標= $(8,8,8)$ 或 $\left(-\frac{2}{3},-\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right)$

10. 在直角坐標平面上，已知圓 C 的半徑為 $4\sqrt{13}$ 且圓心在第三象限。從圓 C 外一點 P 對圓 C 作兩條切線，切點為 A,B 而斜率為 $\frac{2}{3},\frac{3}{2}$。若 ΔPAB 的外接圓的圓心為 $(6,4)$，求圓 C 的圓心的座標= $(-20,-22)$

11. 設 $a_n=\sin\frac{1^\circ}{n}\cdot\frac{1\times2\times3\times4+2\times3\times4\times5+\cdots+n(n+1)(n+2)(n+3)}{1\times2\times3+2\times3\times4+\cdots+n(n+1)(n+2)}$，求 $\lim_{n\to\infty}a_n=$ $\frac{\pi}{225}$

12. 在直角坐標平面上，圓 $x^2+y^2=1$ 先被 $A=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & \sqrt{3}\\ \frac{1}{2} & -3\end{bmatrix}$ 變換為曲線 Γ_1，再被

$$B=\begin{bmatrix}\cos8^\circ & \sin8^\circ\\ \sin8^\circ & -\cos8^\circ\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos9^\circ & \sin9^\circ\\ \sin9^\circ & -\cos9^\circ\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos10^\circ & \sin10^\circ\\ \sin10^\circ & -\cos10^\circ\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos11^\circ & \sin11^\circ\\ \sin11^\circ & -\cos11^\circ\end{bmatrix}\cdots\cdots\begin{bmatrix}\cos66^\circ & \sin66^\circ\\ \sin66^\circ & -\cos66^\circ\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos67^\circ & \sin67^\circ\\ \sin67^\circ & -\cos67^\circ\end{bmatrix}$$

變換為曲線 Γ_2，求 Γ_2 的方程式為 $x^2+\frac{y^2}{12}=1$

[1] (1) $k=3k+1$ $\Rightarrow k=-\frac{1}{2}$ $\quad a_1-(-\frac{1}{2})$

$\Rightarrow a_n-(-\frac{1}{2})=3^{n-1}(\frac{3}{2})$

$\Rightarrow a_n=\frac{3^n-1}{2}$

(2) 當 $k>1$

$3^k-1>3^k-3^{k-1}$

$\Rightarrow \frac{2}{3^k-1}<\frac{2}{3^k-3^{k-1}}=\frac{1}{3^{k-1}}$

$\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{3^k-1}<\frac{2}{3^1-1}+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{3^{k-1}}=1+\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}$

[2] "係數相同" 先整理 $\frac{22+27+32}{12}$

$\begin{cases} a+\frac{1}{b}=\frac{11}{6} \\ b+\frac{1}{c}=\frac{9}{4} \\ c+\frac{1}{a}=\frac{8}{3} \end{cases}$

(和) $\Rightarrow a+b+c+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{27}{4}$

(積) $\Rightarrow abc+a+b+c+\frac{1}{abc}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=11$

令 $abc=S$ $\Rightarrow S+\frac{1}{S}=\frac{17}{4}$ $\quad \begin{matrix}4 & -1\\ 1 & -4\end{matrix}$

$\Rightarrow 4S^2-17S+4=0$ (peter0210)

$\Rightarrow abc=4$ or $\frac{1}{4}$ $\Rightarrow \frac{1}{a}=\frac{bc}{4}$ or $4bc$

$c+\frac{1}{a}=\frac{8}{3}$

$\Rightarrow c+\frac{1}{4}(\frac{9}{4}c-1)=\frac{8}{3}$ or $c+4(\frac{9}{4}c-1)=\frac{8}{3}$

$\Rightarrow \frac{25}{16}c=\frac{35}{12}$ or $10c=\frac{20}{3}$

$\Rightarrow c=\frac{28}{15}$ or $\frac{2}{3}$

二、計算證明題：3 題(28 分)

1. 若數列$\langle a_n\rangle$滿足$\begin{cases} a_1=1 \\ a_{n+1}=3a_n+1, n\in\mathbb{N} \end{cases}$

$\frac{3^n-1}{2}$, $n\in\mathbb{N}$ (1)試求a_n的一般式(3 分) (2)證明$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}<\frac{3}{2}$(5 分)

$\frac{2}{3}$ or $\frac{28}{15}$ 2. 設三正數a,b,c滿足$ab-\frac{11}{6}b=-1$，$bc-\frac{9}{4}c=-1$，$ac-\frac{8}{3}a=-1$，則$c=$________。(10 分)

3. 著名的 Bernoulli 不等式說，對於給定的正整數n，不等式「$(1+x)^n\geq 1+nx$」在$x\geq -1$時恆成立。本題希望推廣此不等式。今設n是大於 1 的奇數。

(1) 試證：恰有一個小於-2的實數x_n，使得不等式「$(1+x)^n\geq 1+nx$」在$x\geq x_n$時恆成立。(4 分)

(2) 承(1),試證：$\lim\limits_{\substack{n\text{為奇數}\\ n\to\infty}} x_n=-2$。(6 分)

答案:

一、填空題：12 格，每格 6 分

1	2	3
$\frac{\sqrt{5}}{5}$	$\frac{5}{8}$	$(1,2)$
4	5	6
$\frac{2}{5}$	$5+2\sqrt{2}$	$(\frac{5}{6},\frac{5}{6}\sqrt{6})$
7	8	9
$(5,\frac{1}{2})$	$y-8=-2(x-2)$	$(8,8,8)$ 或 $(\frac{-2}{3},\frac{-2}{3},\frac{-2}{3})$
10	11	12
$(-20,-22)$	$\frac{\pi}{225}$	$x^2+\frac{y^2}{12}=1$

二、計算證明題：3 題(28 分)

1.(1)$a_n=\frac{3^n-1}{2}$，$n\in\mathbb{N}$ (3 分) (2)略 (5 分)

2. $\frac{2}{3}$ 或 $\frac{28}{15}$ (10 分)

3.(1) 略 (4 分) (2)略 (6 分)