桃園高中 113 學年度第 1 次教師甄選初試 數學科 試題卷

----------彌----------封----------線----------

2024. 7.19 (五) ~7.22 (一) Ru

一、是非題：每題 2 分，共 10 分。

X 1. 兩函數$y=f(x)=(0.07)^x$與$y=g(x)=\log_{0.07}x$ 的圖形恰交於三點

O 2. 若數據x_1，x_2，…，x_{100}的平均數為 10，標準差為 1，則至少有 75 個數據x_i滿足$8\le x_i\le 12$

X 3. 若已標準化二維數據(h_1,k_1)，(h_2,k_2)，…，(h_n,k_n)的最適合直線為$y=rx$，則二維數據(k_1,h_1)，(k_2,h_2)，…，(k_n,h_n)的最適合直線為$y=\frac{x}{r}$。

O 4. 已知一正立方體，A為某一稜的中點，通過A點的平面與此立方體表面相截，截痕的形狀有可能為五邊形。 $(xy=k)$

X 5. $\lim_{x\to 0^+} x^x$不存在。

$\boxed{6}$ $P(2,2)$ 75° $A(t,y)$

$m=\tan 75^\circ=2+\sqrt{3}=\dfrac{y-2}{t-2}$ $\quad t\left((2+\sqrt{3})(t-2)+2\right)=-(2+\sqrt{3})t^2$

$m=f'(t)$ $\quad \Rightarrow t\left(2(2+\sqrt{3})t-2(2+\sqrt{3})+1\right)=0$

$=\dfrac{-k}{t^2}=2+\sqrt{3}$ $\quad \Rightarrow t=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2+\sqrt{3}}=\sqrt{3}-1 \Rightarrow k=-(2+\sqrt{3})(4-2\sqrt{3})$

二、填充 A：每格 5 分，共 45 分。

6. 雙曲線$\Gamma: xy=k$，$k<0$，點$P(2,2)$，過P作Γ兩切線，切點為A、B點，若三角形ΔPAB是正三角形，求$k=$ -2

7. 設A、B、Q為三階實數方陣，滿足$AQ=QB$。設實數a,b滿足$a^2+b^2=1$，令$A=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&1+b^2&-ab\\0&-ab&1+a^2\end{bmatrix}$，$Q=\begin{bmatrix}0&0&1\\a&-b&0\\b&a&0\end{bmatrix}$，求矩陣$B$為 $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$

$\boxed{7}$ $|Q|=1$ $\quad Q^{-1}AQ$

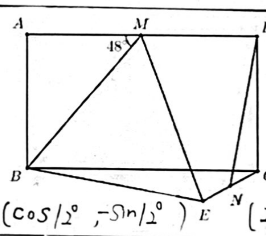
$$\begin{array}{cccc|c} 0&0&b&0&a\\ -b&a&0&-b&\\ 1&0&0&1&0\\ 0&a&b&0&a\\ -b&a&0&-b& \end{array}$$

$=\begin{bmatrix}0&a&b\\0&-b&a\\1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&1+b^2&-ab\\0&-ab&1+a^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}&&\\&&\\&&\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}0&a&b\\0&-2b&2a\\-1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1\\a&-b&0\\b&a&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$ #

$\boxed{8}$ $(x,y,z)=\left(\dfrac{2021}{3},\dfrac{2024}{3},\dfrac{2027}{3}\right)$ $\quad (x+y+z)\cdot\frac{1}{2}\left((x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\right)$
$=2024\cdot\frac{1}{2}(1+1+4)=6072$

8. $x+y+z=2024$，且$\dfrac{x}{2021}=\dfrac{y}{2024}=\dfrac{z}{2027}$，則$x^3+y^3+z^3-3xyz=$ 6072



$D(2\cos 48^\circ,\sin 48^\circ)$ $\quad C(2\cos 48^\circ,0)$ $\quad (\cos 12^\circ,-\sin 12^\circ)$ E $\quad \left(\dfrac{2\cos 48^\circ+\cos 12^\circ}{2},\dfrac{-\sin 12^\circ}{2}\right)$

$\boxed{9}$ 9. 如右圖，點M是長方形$ABCD$的邊AD的中點，ΔBME是正三角形，N為線段$\overline{EC}$的中點。已知$\angle AMB=48^\circ$，$\overline{BM}=1$,則$\overline{DN}$的長度是 $\frac{\sqrt{3}}{2}$。

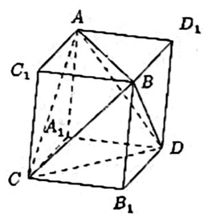
$\overline{ND}^2=\left(\cos 48^\circ-\dfrac{\cos 12^\circ}{2}\right)^2+\left(\sin 48^\circ+\dfrac{\sin 12^\circ}{2}\right)^2=1+\frac{1}{4}-\cos 60^\circ=\frac{3}{4} \Rightarrow \overline{ND}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

10. 已知$\sin\theta=\dfrac{24}{25}$，$\cos\theta=\dfrac{7}{25}$，$Arg(z^2+25)=\theta$，$Arg(z^2-25)=\theta+\dfrac{\pi}{2}$，求複數$z=$ $\frac{7}{5}+\frac{24}{5}i$，$-\frac{7}{5}-\frac{24}{5}i$

$\boxed{10}$ $z^2=25e^{i(\theta+2k\pi)} \Rightarrow z=5e^{i(\theta+k\pi)}$ $\quad k$ is even: $z=5e^{i\theta}$, k is odd: $z=5e^{i(\theta+\pi)}$

$25 \quad z^2 \quad 25 \quad 25 \quad \theta \quad \theta \quad \theta$

11. 如圖所示$ABCD$是一個四面體，$\overline{BC}=\overline{CD}=\overline{BD}=6$，$\overline{AB}=\overline{AC}=\overline{AD}=5$，對稜線$\overline{AB}$作一平面包含稜線$\overline{AB}$，且此平面和$\overline{CD}$平行，對稜線$\overline{CD}$作一平面包含稜線$\overline{CD}$，且此平面和$\overline{AB}$平行，…。對四面體$ABCD$的每一條稜線均作對應的操作可得出 6 個平面，此 6 個平面圍成一個平行六面體，求此平行六面體體積 $9\sqrt{39}$



$\boxed{11}$ $5 \quad 6 \quad 3\sqrt{3} \quad 4 \quad 5 \quad 3 \quad M \quad h$

$\cos M=\dfrac{27+16-25}{2\cdot 4\cdot 3\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ $\quad 4 \quad \sqrt{13} \quad \sqrt{3}$ $\quad 4\cdot 3\sqrt{3}\cdot\dfrac{\sqrt{13}}{4}=4\cdot h$

$V=3\cdot\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 4\right)\cdot\dfrac{3\sqrt{39}}{4}=9\sqrt{39}$

$\boxed{12}$ 12. 小明在森林中迷了路，若繼續往前走則經過 5 分鐘後會回到原地，若返回走則有一半的機會於 5 分鐘後回到原地，另一半的機會於 10 分鐘後走出森林；假設小明向前走的機率為 0.6，問小明能夠走出森林所花費的時間期望值為 30。

設Y=所花時間

設方向函數 $X=\begin{cases}1, & 走A\\2, & B\\3, & C\end{cases}$

$0.4\cdot\frac{1}{2}$ — A — 10分
$0.4\cdot\frac{1}{2}$ — B — 5分
0.6 — C — 5分

X	1	2	3
$f(x)$	$\frac{2}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{6}{10}$

$E(Y\mid X=1)=10$
$E(Y\mid X=2)=5+E(Y)$
$E(Y\mid X=3)=5+E(Y)$

$E(Y)=E\,E(Y\mid X)=E(m(x))=\sum m(x)f(x)$
$=\frac{2}{10}\cdot 10+\frac{2}{10}(5+E(Y))+\frac{6}{10}(5+E(Y))$

$\Rightarrow E(Y)=\dfrac{平均時間}{逃出機率}=\dfrac{\frac{2}{10}\cdot 10+\frac{2}{10}\cdot 5+\frac{6}{10}\cdot 5}{\frac{2}{10}}=30$

桃園高中 113 學年度第 1 次教師甄選初試 數學科 試題卷

[13] $2\int_0^2 \frac{\sqrt3}{4}(x^2-(8-x^2))^2\,dx$

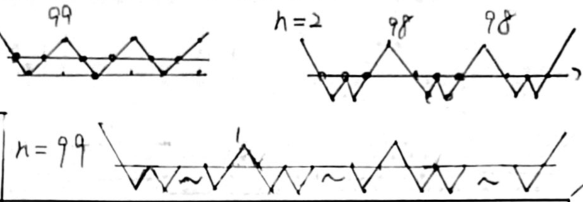
$x^2=8-x^2 \Rightarrow x=\pm2$

$=2\sqrt3\int_0^2 (x^2-4)^2\,dx$

$=2\sqrt3\left(\frac{32}{5}-\frac{8\cdot8}{3}+32\right)=2\sqrt3\cdot\frac{256}{15}=\frac{512\sqrt3}{15}$

[18] $h=1$　$(1+1)\times3$　$h=2$　$(2+1)\times3$　$h=99$　$(99+1)\times3=300$

$\Rightarrow h=100$　$L, 301$ #



13. 坐標空間中，有一立體圖形Γ的底面位於 xy 平面上，且底面是由兩拋物線 $y=x^2$ 與 $y=8-x^2$ 圍成的區域，而Γ的每一個垂直 x 軸的截面都是正三角形，求Γ的體積為__________。 $\frac{512\sqrt3}{15}$

2008AIME II　可區分的 旗杆　相同

14. There are two distinguishable flagpoles, and there are 19 flags, of which 10 are identical blue flags, and 9 are identical green flags. Let N be the number of distinguishable arrangements using all of the flags in which each flagpole has at least one flag and no two green flags on either pole are adjacent. Find $N=$________。 2310

adjacent 相鄰

[14] case1: 2竿 皆有B / $^\vee B^\vee B^\vee\cdots{}^\vee B^\vee \to C^9_1$(旗杆) $^\vee B^\vee B^\vee$ / 12个V 放入G C^{12}_9　case2: 10个B 0个B(1个G) $\to C^{11}_8\cdot2$ 剩8个G

$C^9_1\cdot C^{12}_9+C^{11}_8\cdot2$

$=9\cdot\frac{12\cdot11\cdot10}{3\cdot2}+\frac{11\cdot10\cdot9}{3\cdot2}\cdot2$

$=(18+3)\cdot110=2310$

[15] 三、填充 B：每格 7 分，共 35 分。

15. 假設一位數學老師決定按照以下規則來決定當天(工作天)要吃團膳。對每一個工作天，

規則 1：如果前兩個工作天都沒有吃團膳，則今天要吃團膳；

規則 2：如果前一個工作天吃團膳，則今天不吃團膳；

規則 3：規則 1 和規則 2 不適用的工作天，透過丟一個公正的硬幣隨機決定今天是否吃團膳。

從長遠看來，數學老師吃團膳的天數佔全部工作天的比例為 P，試求 P 值為_________。 $\frac25$

S_1: XX $(\to V)$　S_2: V $(\to X)$　S_3: X $(\frac12 V, \frac12 X)$

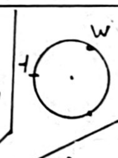
$$\begin{array}{c|c} & S_1\quad S_2\quad S_3 \\ \begin{array}{c}S_1\\S_2\\S_3\end{array} & \begin{bmatrix}0&0&\frac12\\1&0&\frac12\\0&1&0\end{bmatrix}\end{array}\begin{bmatrix}1-\alpha-\beta\\ \alpha\\ \beta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac12(1-\alpha-\beta)\\ 1-\alpha-\frac{\beta}{2}\\ \alpha\end{bmatrix}$$

$\Rightarrow \alpha=\beta$, $\alpha=1-\frac32\alpha \Rightarrow \alpha=\frac25$

16. 圓 $(x-1)^2+(y+2)^2=23$ 與直線 $y=x+k$ 交於 A,B 兩點，$O(0,0)$，已知 $\angle AOB=90^\circ$，求 k 之值_________。 3, −6

[16] $2x^2+2(k+1)x+k^2+4k-18=0 \Rightarrow k^2+4k-18-k(k+1)+k^2=0$

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=(\alpha,\alpha+k)\cdot(\beta,\beta+k)=0 \Rightarrow k^2+3k-18=0$　$k+6$, $k-3$ $\Rightarrow k=3$ or -6



$w=e^{i(\pi/3)}$, $w^3=-1$

$f(w)=-w-1$

17. 多項式 $f(x)=x^{130}-1$，$g(x)=x^4-x^3+2x^2-x+1$，求 $f(x)$ 除以 $g(x)$ 的餘式為_________。 $-x^3-x-2$

[17] $f(x)=x^{130}-1=(x^2+1)(x^2-x+1)Q(x)+(x^2-x+1)(Ax+B)+\underline{-x-1}$

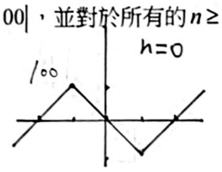
$(x^2-x+1)(-x-1)-x-1=-x^3-x-2$ #

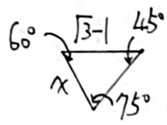
$f(i)=-i(Ai+B)-i-1=A-i(B+1)-1=-2$

$\Rightarrow A=-1,\ B=-1$

18. 設 $f_0(x)=x+|x-100|-|x+100|$，並對於所有的 $n\ge1$，令 $f_n(x)=|f_{n-1}(x)|-1$。試問有多少個 x 滿足 $f_{100}(x)=0$？ 301 答：_________。

[18] $f(x)=\begin{cases}x-200, & x\ge100\\ -x, & -100\le x<100\\ x+200, & x<-100\end{cases}$



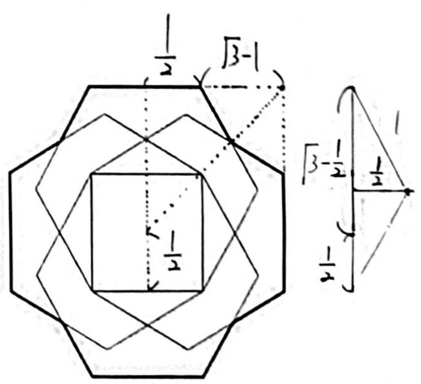


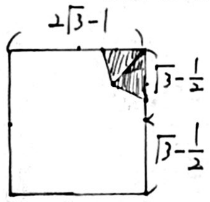
hexagons 六邊形 polygon 多邊形

19. Four regular hexagons surround a square with a side length 1, each one sharing an edge with the square, as shown in the figure on the right. The area of the resulting 12-sided outer nonconvex polygon can be written as $m\sqrt{n}+p$, where m, n, and p are integers and n is not divisible by the square of any prime. What is $m+n+p$? Ans: _________。 −4

$\frac{x}{\frac{\sqrt2}{2}}=\frac{\sqrt3-1}{\frac{\sqrt6+\sqrt2}{4}}$

$\Rightarrow x=(\sqrt3-1)^2=2(2-\sqrt3)$





$(2\sqrt3-1)^2$

$\downarrow$

$13-4\sqrt3-(36-20\sqrt3)$

$=16\sqrt3-23$ #

$\times 8 \to \frac12\cdot2(2-\sqrt3)(\sqrt3-1)\frac{\sqrt3}{2}\cdot8$

$=4(2\sqrt3-3)(\sqrt3-1)=4(9-5\sqrt3)$

$=36-20\sqrt3$

2022 AMC 12B