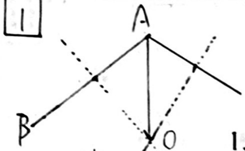
113 高師大附中

$\boxed{1}$



$\begin{cases}\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}\\ \overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AC}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}2l^2x-y=l^2\\ -2l^2x+4y=2\end{cases}$

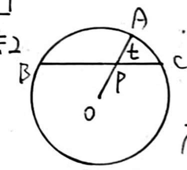
$4l^2x-2y=2l^2$

$\Rightarrow \begin{cases} \\ -2x+\frac{4}{l^2}y=\frac{2}{l^2}\end{cases}$

$\Rightarrow y=\frac{l^2+2}{3},\ x=\frac{4l^2+2}{3\cdot 2l^2}$

$x+y=\frac{4}{3}+\frac{l^2}{3}+\frac{1}{3l^2}\geq\frac{4}{3}+\frac{2}{3}=2$

$\boxed{1}$ 法2



令 $\overline{AP}=t,\ \overline{AO}=r$

$0\leq t\leq\frac{r}{2}$

$\overrightarrow{AO}=\frac{r}{t}(\overrightarrow{AP})$

$=\frac{r}{t}(m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AC})$

$x+y=\frac{r}{t}\geq\frac{r}{\frac{r}{2}}=2$

法1

1.已知O為ΔABC的外心，$\overline{AB}$的長度為$2l$，$\overline{AC}$的長度為$\frac{2}{l}$，$\angle BAC=120^\circ$，若向量$\overrightarrow{AO}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，試求$x+y$的最小值。

$\boxed{2}$ 2

令 $t=x+\frac{1}{x}$

$\Rightarrow x^2-tx+1=0$

$D\geq 0$

$\Rightarrow t^2\geq 4$

法1 學生(潘 物奧銀牌)(高二段考)提供

$at+b+t^2-2=0$

$(a^2+b^2)(t^2+1)\geq(at+b)^2=(-t^2+2)^2$

$\Rightarrow a^2+b^2\geq\frac{(t^2+(-3))^2}{t^2+1}$

$=t^2+1+\frac{9}{t^2+1}-6$

$\geq 5+\frac{9}{5}-6=\frac{4}{5}$

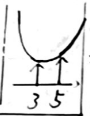
$\frac{4}{5}$

2.已知函數$f(x)=x^2+ax+\frac{1}{x^2}+\frac{a}{x}+b$，其中$x$為非零實數。若實數$a,b$使得$f(x)=0$有實根，試求$a^2+b^2$的最小值。

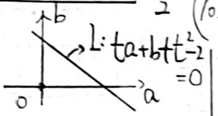
$y=s+\frac{9}{s}$ $(s=t^2+1)$

$y'=1-\frac{9}{s^2}=0$

s		3	
y'	$-$	0	$+$
y	↘		↗



法2 (102 建中 99台中區複賽)



a^2+b^2 的 min

$=(d(O,L))^2$

$=\frac{(t^2-2)^2}{t^2+1}\cdots$

$\boxed{2}$ 法3 令 $a=r\cos\theta$, $b=r\sin\theta$

$tr\cos\theta+r\sin\theta=2-t^2$

$\Rightarrow 2-t^2\leq r\sqrt{t^2+1}$

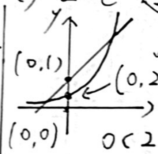
$\Rightarrow\cdots$

3.已知常數e為自然底數，且函數$f(x)=e^x(x-ae^x)$恰有兩個不同的極值點，試求實數a的取值範圍。

$0<a<\frac{1}{3}$

$\boxed{3}$ $f(x)=xe^x-a(e^x)^2$　$f'(x)=e^x+x\cdot e^x-2a(e^x)e^x=e^x(x+1-2ae^x)=0$

$\begin{cases}y=x+1\\ y=2ae^x\end{cases}$ 过

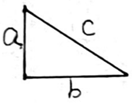


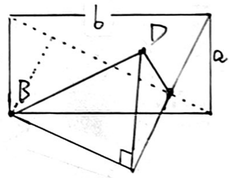
$0<2a<1$

$\Rightarrow 0<a<\frac{1}{2}$

4.長方形紙片 $ABCD$ 中，$\overline{AB}=6$、$\overline{AD}=2\sqrt{3}$，今將此長方形紙片，沿對角線$\overline{AC}$ 折起。使折起後的半平面 ACD 與半平面 ABC 所夾的兩面角為$\frac{\pi}{3}$，求$\overline{BD}$的長度

ANS: $\sqrt{21}$



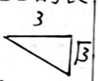


$\boxed{4}$ $a^2+b^2=c^2$

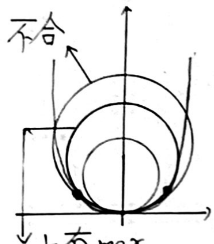
$(c-2\cdot a\cdot\frac{a}{c})^2+(a\cdot\frac{b}{c})^2$

$=\frac{(b^2-a^2)^2+(ab)^2}{c^2}=\frac{1}{12}((9-3)^2+27)\cdot 4$

$=\frac{1}{3}(63)=21\Rightarrow\sqrt{21}$



$\boxed{5}$



r有max

$r=\frac{1}{2}\left(\frac{t^3+1}{t}\right)$

$=\frac{1}{2}\left(t^2+\frac{1}{2t}+\frac{1}{2t}\right)$

$\geq\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$

$=\frac{3\cdot\sqrt[3]{2}}{2}$ $(t=x^2)$

5.在坐標平面上，將一個過原點且半徑為r的圓，完全放入$y\geq x^4$的區域內，此時r的最大值為何?

ANS: $\frac{3\sqrt[3]{2}}{4}$

$\begin{cases}y=x^4\\ x^2+(y-r)^2=r^2\end{cases}$

$\Rightarrow x^8-2rx^4+x^2=0$

$\Rightarrow x^2(x^6-2rx^2+1)=0$

令 $x^2=\square$

$\square^3-2r\cdot\square+1\overset{令}{=}0$ 之2根: α,β

$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

$\xrightarrow{令t=\alpha+\beta}$ $t^3-3\alpha\beta t-(\alpha^3+\beta^3)=0$

$\Rightarrow\begin{cases}\alpha^3\beta^3=(\alpha\beta)^3=\left(\frac{2r}{3}\right)^3\\ \alpha^3+\beta^3=-1\end{cases}$ $\Rightarrow x^2+x-\left(\frac{2}{3}r\right)^3=0$

$\Rightarrow D=0\Rightarrow 1=4\cdot\left(\frac{2}{3}r\right)^3$

$\Rightarrow r=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{4}}=\frac{3\cdot\sqrt[3]{2}}{4}$

不確定

6.設$x\in\mathbb{R}$，則$f(x)=\left|\frac{x^2+24}{8}\right|-\sqrt{\frac{x^4}{64}+\frac{x^2}{2}-\frac{9x}{2}+\frac{145}{16}}$ 之最大值為何?

ANS: $\frac{13}{4}$

$\boxed{6}$ $f(s)=\left|\frac{s^2}{8}-(-3)\right|-\sqrt{\frac{s^2}{8}-2\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{s^2}{8}+\frac{1}{16}+\left(\frac{3}{4}s\right)^2-2\cdot 3\cdot\frac{3}{4}+3^2}$

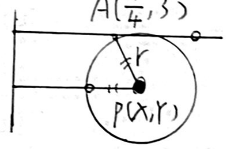
$=\left|\frac{s^2}{8}-(-3)\right|-\sqrt{\left(\frac{s^2}{8}-\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{3}{4}s-3\right)^2}$

令 $X=\frac{s^2}{8}$, $Y=\frac{3}{4}s$

$\Rightarrow Y^2=\frac{9}{16}s^2=\frac{9}{2}X$

$\Rightarrow Y^2=4\cdot\frac{9}{8}X$

$L: X=-3$



$d(P,L)-\overline{PA}$

$=d(P,L)-r\leq d(A,L)=\frac{13}{4}$

7.有一個遊戲的規則如下：從一個裝有編號 1~9 號共 9 顆球的箱子中一次抽出三顆相異的球，若所得的 3 個號碼滿足下列條件 A 或條件 B 之一，則可得獎金 100 元；若條件 A、B 都滿足，則可得獎金 400 元；若條件 A、B 均不滿足，則無獎金。求此遊戲獲得獎金的期望值。

條件 A：三個號碼皆為奇數或皆為偶數。

條件 B：三個號碼由小排到大為等差數列。

ANS: 50 元

$E=\frac{400\times 6+100\times 18}{\frac{9\cdot 8\cdot 7}{3\cdot 2}}\leftarrow C^9_3$

$=\frac{4200}{3\cdot 4\cdot 7}$

$=50$

$\boxed{7}$

奇: 1, 3, 5, 7, 9

$d=2$: 1, 3, 5 / 3, 5, 7 / 5, 7, 9) 4組

$d=4$: 1, 5, 9

$C^5_3-4=6$

偶: 2, 4, 6, 8

$d=2$: 2, 4, 6 / 4, 6, 8) 2組

$C^4_3-2=2$

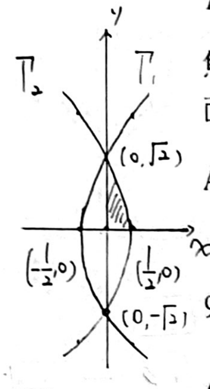
$d=1$: 1, 2, 3 / ⋮ / 7, 8, 9) 7組

$d=3$: 1, 4, 7 / 2, 5, 8 / 3, 6, 9) 3組

2024. 7. 15(一) ~ 7. 16(二) 星巴克 Ru

$\boxed{8}$

8.坐標平面上，A 、B 兩點分別在直線 $L_1: x=-\frac{3}{2}$ 與 $L_2: x=\frac{3}{2}$ 上。$\overline{AB}\perp L_1$，且 M 、N 為 $\overline{AB}$ 的三等分點，並滿足 $\overline{AM}=\overline{MN}=\overline{NB}$。設 Γ_1 為以 L_1 為準線，N 為焦點的拋物線；Γ_2 為以 L_2 為準線，N 為頂點的拋物線，求 Γ_1 與 Γ_2 所圍區域的面積。



ANS: $\frac{4\sqrt{2}}{3}$

$\Gamma_2: y^2=-4(x-\frac{1}{2})$

$\Rightarrow x=-\frac{y^2}{4}+\frac{1}{2}$

$\int_0^{\sqrt{2}}(-\frac{y^2}{4}+\frac{1}{2})\,dy \uparrow$

$(-\frac{1}{4}\cdot\frac{y^3}{3}+\frac{y}{2})\Big|_0^{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2\cdot 3}+\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{3}\xrightarrow{\times 4}\frac{4\sqrt{2}}{3}$

$\boxed{9}$

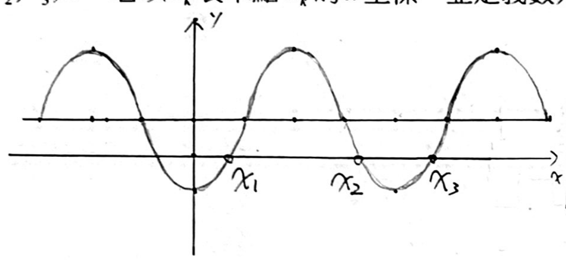
9.坐標平面上，$y=2^{-x}$ 與 $y=\cos(2x+\pi)+\frac{1}{2}$ 的圖形在 y 軸右側的交點由左而右依序為 $A_1,A_2,A_3,\ldots$。若以 x_k 表示點 A_k 的 x 坐標，並定義數列 $\langle C_n\rangle=\langle x_{2n}-x_{2n-1}\rangle$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}C_n$。

ANS: $\frac{2\pi}{3}$

$y=\cos\left(2(x+\frac{\pi}{2})\right)+\frac{1}{2}$

$T=\frac{2\pi}{2}=\pi$

左移 $-\frac{\pi}{2}$



$2x+180°=120°+360°\cdot m$

$2x+180°=240°+360°\cdot n$

$\Rightarrow x_1=30°$

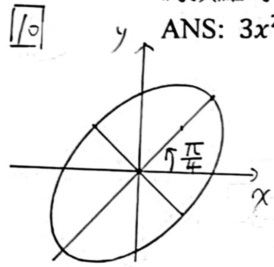
$\Rightarrow x_2=\frac{1}{2}(480°-180°)=150°$

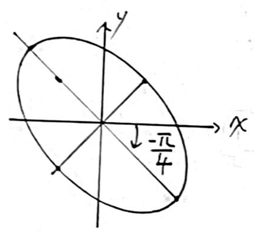
$x_2-x_1=\frac{2}{3}\pi$

10.求以橢圓 $\Gamma: \frac{x^2}{4}+\frac{3y^2}{4}=1$ 內接正方形四個頂點中的其中兩個為焦點，另外兩個為頂點的橢圓方程式。

$\boxed{10}$

ANS: $3x^2\pm 2xy+3y^2=8$





$b^2=c^2=2\Rightarrow a^2=4$

$\Gamma: \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$

$x'+iy'=(x+iy)e^{i(\frac{\pi}{4})}$ $\quad$ $x'+iy'=(x+iy)e^{i(-\frac{\pi}{4})}$

$e^{i(-\frac{\pi}{4})}\swarrow$ $\quad$ $e^{i(\frac{\pi}{4})}\swarrow$

$\Rightarrow x+iy=(x'+iy')(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i)$ or $x+iy=(x'+iy')(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i)$

$=\frac{1}{\sqrt{2}}(x'+y')+\frac{1}{\sqrt{2}}(-x'+y')i$ $\quad$ $=\frac{1}{\sqrt{2}}(x'-y')+\frac{1}{\sqrt{2}}(x'+y')i$

代入 Γ

$\Rightarrow \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}(x'+y')^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(x'-y')^2=1$ or $\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}(x'-y')^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(x'+y')^2=1$

$\Rightarrow (x'+y')^2+2(x'-y')^2=8$ or $(x'-y')^2+2(x'+y')^2=8$

$\Rightarrow 3x^2\pm 2xy+3y^2=8$