臺北市立景美女子高級中學 113 學年度第 1 次教師甄選　數學科試題

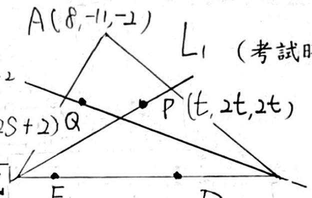
2024.7.9(二) Ru

（考試時間：100 分鐘）

一、填充題：（每題 6 分，共 72 分）

注意：所有答案請化簡為最簡分數或最簡根式

$\boxed{2}$



$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{L_1}=0$

$\Rightarrow (t-8, 2t+11, 2t+2)\cdot(1,2,2)=0$

$\Rightarrow 9t+18=0 \Rightarrow P(-2,-4,-4)$

$\overrightarrow{AQ}\cdot\overrightarrow{L_2}=0$

$\Rightarrow (2s-5, s+11, 2s+4)\cdot(2,1,2)=0$

$\Rightarrow 9s+9=0 \Rightarrow Q(1,-1,0)$

$\overrightarrow{DE}=(6,6,8)$

$\Rightarrow \overleftrightarrow{BC}: \frac{x+12}{3}=\frac{y-3}{3}=\frac{z+6}{4}$

1、下列有關函數的敘述，哪些選項正確？Ans：BD。(全對才給分)

(A) 函數 $g(x)=|x|$ 在 $x=0$ 有極值，且 $g'(0)=0$

(B) 設 $f(x)$ 為多項式函數，若 $f'(a)=0$，則 $f(x)$ 在點 $(a, f(a))$ 必有水平切線

(C) 設 $f(x)$ 為多項式函數，若 $f'(a)=0$，且 $f(x)$ 在 $x=a$ 處有極小值，則 $f''(a)>0$

(D) 設 $f(x)$ 為多項式函數，若對所有實數 x，$f(x)\ge 0$ 恆成立，則 $f(x)$ 的次數必為偶數

(E) 設 $f(x)$ 為一次以上的多項式函數，若 $f(x)$ 為嚴格遞增函數，則 $f'(x)$ 恆大於 0

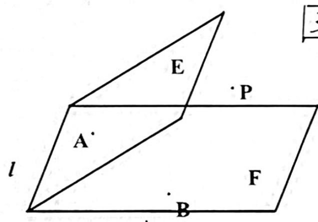
(C) $f(x)=x^4$　　(E) $f(x)=x^3$

2、空間中有一 ΔABC，其中 $A(8,-11,-2)$，若 $\angle B$ 與 $\angle C$ 的內角平分線分別為 $L_1: \frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{2}$ 與 $L_2: \frac{x-3}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-2}{2}$，則直線 BC 的對稱比例式______。

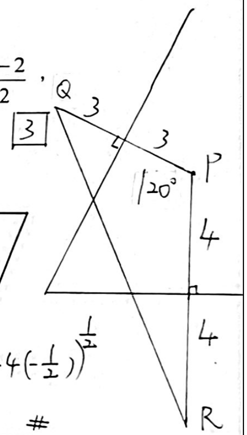
$\frac{x+12}{3}=\frac{y-3}{3}=\frac{z+6}{4}$

3、如右圖，空間中有兩個半平面 E 與 F，且 E 與 F 之交線為 l，假設 E 與 F 的二面角為 60°，A、B 兩動點分別落在 E、F 兩個平面上且 A、B 皆不在 l 上，又空間中一點 P 到 E 和 F 的距離依序為 3 和 4，則 ΔPAB 周長的最小值為______。

$2\sqrt{37}$



$\boxed{3}$



$2\left(9+16-2\cdot3\cdot4\left(-\frac{1}{2}\right)\right)^{\frac{1}{2}}$

$=2\sqrt{37}$ #

4、已知函數 $f(x)=\sqrt{x^4-x^2-6x+10}-\sqrt{x^4-3x^2+4}$，則 $f(x)$ 的最大值為______

$\sqrt{10}$

$\boxed{4}$ $\sqrt{(x-3)^2+(x^2-1)^2}-\sqrt{(x-0)^2+(x^2-2)^2}=\overline{PA}-\overline{PB}\le\overline{AB}=\sqrt{10}$

令 $P(x,x^2)$, $A(3,1)$, $B(0,2)$

5、已知 k 為有理數，且使得方程式 $kx^2+(k-1)x+(k+1)=0$ 的所有解都是整數，則 k 值為______。(全對才給分)

0 or $\frac{1}{7}$ or -1

$\boxed{5}$ $\deg f(x)\le 1$

$\Rightarrow k=0 \Rightarrow -x+1=0$

$\Rightarrow x\in\mathbb{Z} \Rightarrow k=0$ ok

$\deg f(x)=2$

$\Rightarrow k=\frac{x-1}{x^2+x+1}$

$\alpha+\beta=\frac{1-k}{k}$

$=\frac{x^2+2}{x-1}\in\mathbb{Z}$

$\begin{cases}(x-1)\mid x^2+2\\(x-1)\mid x^2-x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(x-1)\mid(x+2)\\(x-1)\mid(x-1)\end{cases}\Rightarrow (x-1)\mid 3$

$x-1$	1	-1	3	-3
x	2	0	4	-2
k	$\frac{1}{7}$	-1	$\frac{1}{7}$	-1

$\Rightarrow k=\frac{1}{7}$ or -1 or 0

6、已知實數 x, y 滿足 $\begin{cases}xy^2\ge 81\\x^2y\ge 243\\x\ge 1, y\ge 1\end{cases}$，當 $(x,y)=(p,q)$ 時，x^3y^4 有最小值 m，則 $\frac{m}{pq}$ 的值為______

2187

$\boxed{6}$ 法1：$3^{30}=(3^4)^5(3^5)^2\le(xy^2)^5(x^2y)^2=(x^3y^4)^3 \Rightarrow m=3^{10}$

$\frac{\square+2\triangle}{2\square+\triangle}=\frac{3}{4}\Rightarrow 2\square=5\triangle$　$\overset{5}{\square}$　$\overset{2}{\triangle}$

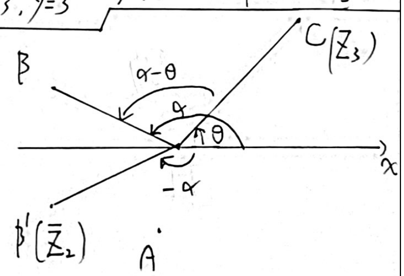
"=" 成立條件 $\begin{cases}xy^2=3^4\\x^2y=3^5\end{cases}\Rightarrow x=3^2, y=3$

$\Rightarrow \frac{m}{pq}=3^7=2187$

法2：線性規劃

7、複數 Z_1 在複數平面上為 A 點，複數 Z_2 在複數平面上為 B 點，複數 Z_3 在複數平面上為 C 點，若 $|Z_1|=\sqrt{2}$、$|Z_2|=\sqrt{5}$、$|Z_3|=3$ 且 ΔABC 的重心為原點，則 $\overline{Z_2}Z_3$ 的實部為______。

-6



$\boxed{7}$ $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}\Rightarrow \overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=-12$

$\Rightarrow 5+9+2\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=2$

$\mathrm{Re}(\overline{Z_2}\cdot Z_3)=|\overrightarrow{OB}||\overrightarrow{OC}|\underbrace{\cos(-\alpha+\theta)}_{=\cos(\alpha-\theta)}$

$=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=-12$

8、$\left(1+2x+3x^2+4x^3+\cdots+100x^{99}\right)^4$ 的展開式中 x^4 的係數為___

330

次數

4	0	0	0
3	1	0	0
2	2	0	0
2	1	1	0
1	1	1	1

→

$5\cdot\frac{4!}{3!}=20$

$4\cdot2\cdot\frac{4!}{2!}=96$

$3\cdot3\cdot4!/2!2!=54$

$3\cdot2\cdot2\cdot4!/2!=144$

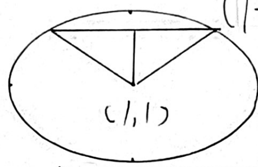
$2\cdot2\cdot2\cdot2=16$

和 = 330

9、已知橢圓 $\Gamma:\begin{cases}x=1+3\cos\theta\\ y=1+4\sin\theta\end{cases}$，$\theta\in R$ 與一平行於 x 軸的直線交於 A、B 兩點，若橢圓中心為 C 點，則 ΔABC 面積的最大值為__________。

6

$\boxed{9}$



$(1+3\cos\theta,\ 1+4\sin\theta)$，$\triangle=\frac{1}{2}\cdot3\cos\theta\cdot4\sin\theta\cdot2$

$=6\cdot\sin2\theta\le6$

10、各位數字總和為 19 的四位數有__________個

615

1 _ _ _ 　 10 _ _ _ 　 1 10 _ _

$H^4_{18}-H^4_9-H^4_8\cdot3$

$=C^{21}_3-C^{12}_3-C^{11}_3\cdot3=1330-220-495=615$

11、已知實係數方程式 $x^4-3x^3-6x^2+ax-24=0$ 有一個三重根，則 a 值為__________

28

$\boxed{11}$ 設4根：$\alpha,\alpha,\alpha,\beta$

$\begin{cases}3\alpha+\beta=3\\ 3\alpha\beta+3\alpha^2=-6\\ \alpha^3\beta=-24\end{cases}$ $\Rightarrow\alpha(3-3\alpha+\alpha)=-2$

$\Rightarrow2\alpha^2-3\alpha-2=0$

$\begin{matrix}2 & +1\\ 1 & -2\end{matrix}$

α	β	$\alpha^3\beta$
2	−3	→ −24 ok
$-\frac{1}{2}$	$\frac{9}{2}$ (不合)	

$\Rightarrow a=-(\alpha^3+3\alpha^2\beta)$

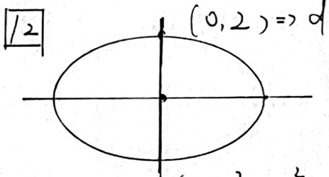
$=-(8-36)=28$

12、若橢圓 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ 和開口向下的拋物線 $y=cx^2+d$ 交於相異三點，則 c 的範圍為__________。

$c<\frac{-1}{9}$

一、填充題：72 分(每題 6 分)

$\boxed{12}$



$(0,2)\Rightarrow d=2$

$(cx^2+2)^2$

$4x^2+9(c^2x^4+4cx^2+4)=36$

$\Rightarrow 9c^2x^4+(9\cdot4c+4)x^2=0$

$\Rightarrow x^2(9c^2x^2+9\cdot4c+4)=0$

$x^2\to0$

$\Rightarrow x^2=\frac{-4(9c+1)>0}{9c^2}$

$\Rightarrow c<-\frac{1}{9}$

1 BD	2 $\frac{x+12}{3}=\frac{y-3}{3}=\frac{z+6}{4}$
3 $2\sqrt{37}$	4 $\sqrt{10}$
5 0 或 $\frac{1}{7}$ 或−1	6 2187
7 -6	8 330
9 6	10 615
11 28	12 $c<-\frac{1}{9}$