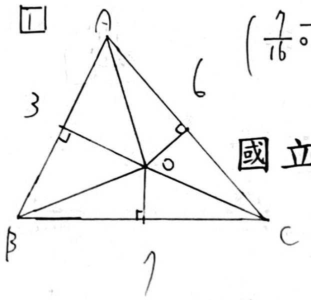
1



$\left(\frac{7}{16}\vec{OA}+\frac{6}{16}\vec{OB}+\frac{3}{16}\vec{OC}\right)\cdot\vec{BC}$ $\vec{OA}\cdot(\vec{BA}+\vec{AC})$

$=\frac{7}{16}\left(\frac{1}{2}\cdot 9+\left(-\frac{1}{2}\cdot 36\right)\right)+\frac{6}{16}\left(-\frac{49}{2}\right)+\frac{3}{16}\cdot\frac{49}{2}=\frac{7(-27)-3\cdot 49}{16\cdot 2}$

$=\frac{-336}{16\cdot 2}=\frac{-21}{2}$

國立鳳新高級中學 113 學年度第 1 次教師甄選

【數學科】試題

2024.7.7(日) ~ 7.8(一) Ru

一、計算證明題 (第 1 題至第 10 題每題 8 分，第 11 題至第 12 題每題 10 分)

$-\frac{21}{2}$ 1. 已知ΔABC中，$\overline{AB}=3$、$\overline{AC}=6$、$\overline{BC}=7$，O為外心、I為內心，求$\overrightarrow{OI}\cdot\overrightarrow{BC}$。

$\cos\theta=\frac{1}{2},\ \theta=\frac{\pi}{3}$

$M=\frac{3\sqrt{3}}{2}$

2 法: $\to \frac{d}{d\theta}\left(2\sin\theta(\cos\theta+1)\right)=0 \Rightarrow \cos\theta(\cos\theta+1)-\sin^2\theta=0 \Rightarrow 2\cos^2\theta+\cos\theta-1=0$

$\frac{3\sqrt{3}}{2}$, $\frac{\pi}{3}$ 2. 已知$0<\theta<\pi$，求$\sin 2\theta+2\sin\theta$的最大值並寫出此時之θ值為何？

2 法2: $\left(\sin\theta(\cos\theta+1)\right)^2=(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)^3$, $2=1-\cos\theta+\frac{1}{3}(1+\cos\theta)+\frac{1}{3}(1+\cos\theta)+\frac{1}{3}(1+\cos\theta)\geq 4\cdot\sqrt[4]{\frac{1}{27}(\quad)^2}$

$\Rightarrow(\quad)\leq\frac{3\sqrt{3}}{2}$

"=" 成立 $\Leftrightarrow 1-\cos\theta=\frac{1+\cos\theta}{3}$ $\Rightarrow\cos\theta=\frac{1}{2}$ $\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{3}$

3 thepiano 640

3. 將 6 個編號為 1 到 6 號的小球放入編號為 1 到 5 號的盒子中，不允許有空盒，且任意一個小球都不能放在有相同編號的盒子內(球號與盒子編號不同)，則共有多少種不同的放法？

先選一盒放2球 $\to C^5_1$

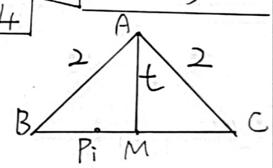
1° ②③④⑤ 選2球 $\to C^4_2=6$; (②③) ① ④ ⑤ ⑥ / 1 2 3 4 5 $\to 4!-C^2_1\cdot 3!+C^2_2\cdot 2!=14$

2° ②③④⑤ 選1球 $C^4_1=4$; (①⑥) ① ③ ④ ⑤ / 1 2 3 4 5 $\to 4!-C^3_1\cdot 3!+C^3_2\cdot 2!-C^3_3 1!=11$

$5(6\cdot 14+4\cdot 11)=640$ #

4. ΔABC中，$\overline{AB}=\overline{AC}=2$，$\overline{BC}$邊上有 100 個相異點$P_1,P_2,P_3,\ldots,P_{100}$，若$m_i=\overline{AP_i}^2+\overline{BP_i}\cdot\overline{CP_i}(i=1,2,\ldots,100)$，則$m_1+m_2+m_3+\cdots+m_{100}$之值為何？ 400

4



$m_i=\vec{AP_i}\cdot\vec{AP_i}-(\vec{BA}+\vec{AP_i})\cdot(\vec{CA}+\vec{AP_i})$

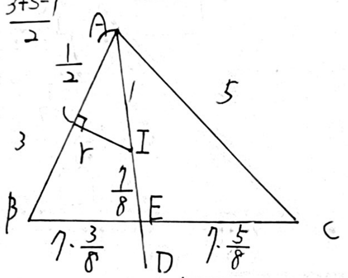
$=\vec{AP_i}\cdot(-2\vec{MA})-\vec{AB}\cdot\vec{AC}=2t^2-\frac{1}{2}\left(4+4-(2\sqrt{4-t^2})^2\right)=4$

$\Rightarrow 4\cdot 100=400$

5. ΔABC中，設$\overline{AB}:\overline{AC}:\overline{BC}=3:5:7$。令$I$為$\Delta ABC$的內心，直線$AI$交$\Delta ABC$外接圓於另一點$D$，試求$\frac{\overline{ID}}{\overline{AD}}$的值 $\frac{7}{8}$

5

$\frac{3+5-7}{2}$



$\Delta=r\cdot\frac{15}{2}=\sqrt{\frac{15}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{9}{2}\cdot\frac{1}{2}}=\frac{15\sqrt{3}}{4}$

$\Rightarrow r=\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \overline{AI}=1$

$\overline{AE}=\sqrt{3\cdot 5-7\cdot\frac{3}{8}\cdot 7\cdot\frac{5}{8}}=\frac{15}{8}\Rightarrow\overline{IE}=\frac{7}{8}$

$\overline{DE}\cdot\overline{AE}=\overline{AE}\cdot\overline{EC}$

$\Rightarrow\overline{DE}=\frac{49}{8} \Rightarrow \frac{49+7}{49+15}=\frac{7}{8}$

4.42 6. 設X為一隨機變數，若$X\sim B(10,0.1)$，試求$E(X^3)$的值

6 $X(X-1)(X-2)=X^3-3X^2+2X=X^3-3X(X-1)-X$

法: $\Rightarrow X^3=X(X-1)(X-2)+3X(X-1)+X$

$E(X(X-1))=\sum_{k=1}^{n}C^n_k k(k-1)p^k(1-p)^{n-k}=n(n-1)p^2$

$E(X(X-1)(X-2))=\sum_{k=2}^{n}C^n_k k(k-1)(k-2)p^k(1-p)^{n-k}=n(n-1)(n-2)p^3$

$\Rightarrow\frac{10\cdot 9\cdot 8}{10\cdot 10\cdot 10}+3\cdot\frac{10\cdot 9}{10\cdot 10}+10\cdot\frac{1}{10}=0.72+2.7+1=4.42$

法2: $M_X(t)=E(e^{tX})=\sum_{k=0}^{n}e^{tk}p^k(1-p)^{n-k}=(pe^t+1-p)^n$

$\frac{d}{dt}M_X(t)=n(pe^t+1-p)^{n-1}\cdot pe^t$

$\frac{d}{dt^2}M_X(t)=\left[n(n-1)(pe^t+1-p)^{n-2}\cdot pe^t\cdot pe^t+n(pe^t+1-p)^{n-1}\cdot pe^t\right]$

$\frac{d}{dt^3}M_X(t)=n(n-1)(n-2)(pe^t+1-p)^{n-3}\cdot(pe^t)^3+n(n-1)(pe^t+1-p)^{n-2}\cdot 2(pe^t)^2$
$+[\quad]$

$t=0\Rightarrow n(n-1)(n-2)p^3+n(n-1)p^2\cdot 3+np$

國立鳳新高級中學 113 學年度第 1 次教師甄選

【數學科】試題

$\boxed{7}$ 令 $k=(x+\sqrt{\ })(y+\sqrt{\ })=xy+\sqrt{\ }\sqrt{\ }+x\sqrt{\ }+y\sqrt{\ }$ —①

$2024=(x-\sqrt{\ })(y-\sqrt{\ })=xy+\sqrt{\ }\sqrt{\ }-x\sqrt{\ }-y\sqrt{\ }$ —②

①,② $\Rightarrow k=2024$

①−②: $x\sqrt{\ }=-y\sqrt{\ }$ $\Rightarrow (x^2-1012)^2=(y^2-1012)^2$

$\Rightarrow (x^2+y^2-2024)(x+y)(x-y)=0$

①+②: $xy+\sqrt{x^2-2024}\sqrt{y^2-2024}=2024$

当 $x=y$: $x^2+x^2-2024=2024 \Rightarrow x^2=2024 \Rightarrow x^2-2023=1$

当 $x=-y$: $-x^2+x^2-2024=2024$ 不合

当 $x^2+y^2=2024$，令 $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$ $\Rightarrow r^2SC+\sqrt{r^2(C^2-1)}\sqrt{r^2(S^2-1)}=r^2$

$\Rightarrow SC-SC=1$ 不合

7. 已知實數 x,y 滿足 $(x-\sqrt{x^2-2024})(y-\sqrt{y^2-2024})=2024$，則 $3x^2-2y^2+3x-3y-2023=?$

1

$\boxed{8}$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 5 & -5k-5 & +71k-1 & +1-66k \\ + & & +5 & -5k & 66k-1 \\ \hline & 5 & -5k & +66k-1 & +0 \end{array}\ \ 1$$

$f(x)=(x-1)(5x^2-5kx+66k-1)$

$=(x-1)\cdot 5(x-\beta)(x-\gamma)$

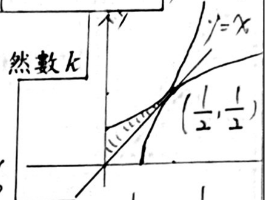
8. 設三次方程式 $5x^3-5(k+1)x^2+(71k-1)x+1-66k=0$ 的三個根均為自然數，求自然數 k 為多少？

76

$x=\frac{66}{5}$ $\Rightarrow 4351=66\times66-5=(66-5\beta)(66-5\gamma)$ $\Rightarrow \beta=17,\ \gamma=59$

(消去k) 代入□ $\Rightarrow 19\times229=(5\beta-66)(5\gamma-66)$ $\Rightarrow k=17+59=76$

$\boxed{9}$



9. 已知 4 條拋物線 $\Gamma_1: y=x^2+a$，$\Gamma_2: y=-x^2-a$，$\Gamma_3: y^2=x-a$，$\Gamma_4: y^2=-x-a$，其中 a 為正實數，若任相鄰兩條拋物線均相切，試求這 4 條拋物線所圍成之區域面積。

$\frac{1}{3}$

$m=1=2\cdot\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \frac{1}{2}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\leftarrow a$

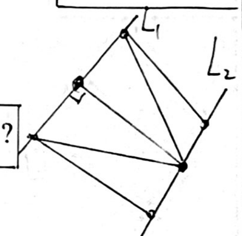
$\int_0^{\frac{1}{2}}(x^2-x+\frac{1}{4})dx=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{8}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}$

$\overset{\times 8}{\Longrightarrow} A=\frac{1}{3}$

10. 空間中兩歪斜線 $L_1: \frac{x-3}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z+2}{-2}$，$L_2: \frac{x}{3}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+1}{-2}$，P 在 L_1 上，且 Q，R 都在 L_2 上，若 △PQR 為正三角形，求△PQR 的最小面積為多少？

$\frac{49\sqrt{3}}{135}$

$\boxed{10}$



$$\begin{array}{l} 1)\ 2\ \ -2\ \ 1\ \ 2\ (-2 \\ 3)\ 1\ \ -2\ \ 3\ \ 1\ (-2 \\ \quad -2\ \ -4\ \ -5 \end{array}$$

$(0,2,-1)$

$E: 2x+4y+5z-3=0$

$d(L_1,E)=\frac{7}{3\sqrt{5}}$

$\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\left(\frac{7}{3\sqrt{5}}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{7}{3\sqrt{5}}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$

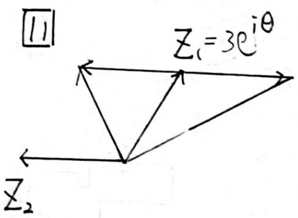
$=\frac{49\sqrt{3}}{135}$

11. 設 z_1,z_2 為複數，$|z_1|=|z_1+z_2|=3$，$|z_2-z_1|=3\sqrt{3}$，求 $\log(|(z_1\overline{z_2})^{2000}+(\overline{z_1}z_2)^{2000}|)=?$

$4000\log3$

12. 試證明：對於任意正整數 n，$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{2n}<\frac{\sqrt{2}}{2}$ 恒成立。

$\boxed{11}$



$=3e^{i(\theta+\frac{2}{3}\pi)}$

$\log\left|\left(3^2\cdot e^{i(-\frac{2}{3}\pi)}\right)^{2000}+\left(3^2e^{i(\frac{2}{3}\pi)}\right)^{2000}\right|$

$=\log\left|3^{4000}\cdot\cos(\frac{4}{3}\pi)\cdot2\right|$

$=4000\log3$

$\boxed{12}$

$\left(\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)^2\le\left(\left(\frac{1}{n+1}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{2n}\right)^2\right)(1^2+\cdots+1^2)$

$<\left(\frac{1}{(n+1)\cdot n}+\frac{1}{(n+2)(n+1)}+\cdots+\frac{1}{(2n)(2n-1)}\right)\cdot n$

$=\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)\cdot n$

$=\frac{1}{2n}\cdot n=\frac{1}{2}$ $\Rightarrow (\quad)<\frac{1}{\sqrt{2}}$

Created with Scanner Pro