2024.7.5(五)

~7.6(六)

Ru

臺北市立復興高級中學113學年度第二次專任教師甄選
數學科教師甄選筆試題目卷

一、填充題：(80%。共10題，每題8分)

1. 函數 $f(x)$ 為49次多項式，$f(k)=\frac{1}{k}$，$k=1,2,3,\cdots,50$皆成立，則 $f(-2)=$____________。

$\frac{1325}{2}$

$\boxed{1}$ 令 $g(x)=xf(x)-1$

$\begin{cases} \deg g(x)=50 \\ g(1)=\cdots=g(50)=0 \end{cases}$

令 $g(x)=A(x-1)\cdots(x-50)$

$g(0)=(50!)A=-1$

$f(x)=\dfrac{g(x)+1}{x}$

$f(-2)=-\frac{1}{2}\left(\frac{-1}{50!}(-3)(-4)\cdots(-52)+1\right)$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{51\cdot 52}{2}-1\right)=\frac{1325}{2}$

2. 已知 x、y 為實數，且 $xy+x+y=39$，$x^2y+xy^2=308$，求 x^2+y^2 之最大值為____________。

762

$\boxed{2}$

令 $x+y=s$，$xy=t$

$s+t=39$

$st=308$

$=2\cdot 2\cdot 7\cdot 11$

$=28\cdot 11$

(s,t)

$=(28,11)$ or $(11,28)$

s^2-2t 之 max $=28^2-22$

$=784-22$

$=762$

3. 考慮滿足 $a^2+b^2=49$，$c^2+d^2-16c-12d=-96$ 的所有實數 a、b、c、d，求 $\sqrt[3]{16c+12d-2ac-2bd-47}$ 的最小值為____________。

1

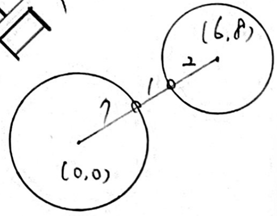
$\to (c-8)^2+(d-6)^2=4$

原式 $=a^2-2ac+c^2+b^2-2bd+d^2$

$-\left((c-8)^2+(d-6)^2\right)$

$+100-(a^2+b^2)-47$

$=(a-c)^2+(b-d)^2$



4. 同時投擲四個大小不同之骰子，點數和為18之情形有____________種。

80

$\boxed{4}$

6 6 5 1	12
6 6 4 2	12
6 6 3 3	6
6 5 5 2	12
6 5 4 3	24
6 4 4 4	4
5 5 5 3	4
5 5 4 4	6

$\frac{4!}{2!}=12$

和 $=80$

5. 袋中有紅球5個、白球3個、黑球4個，若每球被選取的機會均等，今每次由袋中取一球，取後不放回，取完為止，則黑球最先取完的機率為____________。

$\frac{20}{63}$

$\boxed{5}$ 法1：$\frac{5}{9}+\frac{3}{7}-\frac{8}{12}=\frac{35+27-42}{63}=\frac{20}{63}$

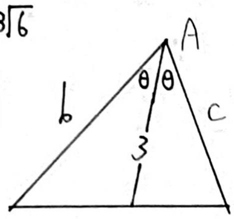
法2：$B\to R\to W$　　$B\to W\to R$

$\frac{5}{9}\cdot\frac{3}{12}+\frac{3}{7}\cdot\frac{5}{12}=\frac{5}{12}\left(\frac{1}{3}+\frac{3}{7}\right)=\frac{5}{12}\cdot\frac{16}{21}=\frac{20}{63}$

6. 已知 ΔABC 中，$\overline{AB}\times\overline{AC}=15$，$\angle A$ 的角平分線長度為 3，則 ΔABC 的最大面積為________。

$3\sqrt{6}$

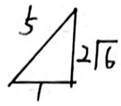
$\boxed{6}$



$\triangle=\frac{1}{2}\cdot 15\cdot 2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot(b+c)\sin\theta$ ⇒ $\triangle=\frac{1}{2}\cdot 15\sin 2\theta$

⇒ $\cos\theta=\frac{b+c}{10}\geq\frac{\sqrt{15}}{5}$ $\leq\frac{15}{2}\cdot\frac{2\sqrt{6}}{5}=3\sqrt{6}$

⇒ $\cos 2\theta=2\left(\frac{b+c}{10}\right)^2-1\geq 2\cdot\frac{15}{25}-1=\frac{1}{5}$



7. 設 $f(x)=\left|\log\frac{x-k}{3}\right|$，其中 k 為實數。若坐標平面上 P、Q 兩點的坐標分別為 $(1,f(1))$、$(3,f(3))$，試問當 k 為________時，直線 $\overleftrightarrow{PQ}$ 的斜率會最大。

-2

$\boxed{7}$

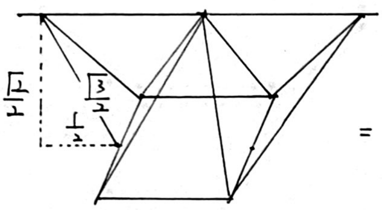
$f(1)=0$ ⇒ $\frac{|1-k|}{3}=1$

⇒ $k=-2$

8. 在多面體$ABCDEF$中，已知平面$ABCD$是邊長為 1 的正方形，且 ΔADE、ΔBCF 均為正三角形，$\overline{EF}//\overline{AB}$ 且 $\overline{EF}=2$，則多面體$ABCDEF$的體積為________。

$\frac{\sqrt{2}}{3}$

$\boxed{8}$



$\frac{1}{3}\cdot 1^2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\left(\frac{\sqrt{2}}{12}\cdot 1^3\right)\cdot 2$

$=\frac{\sqrt{2}}{3}$

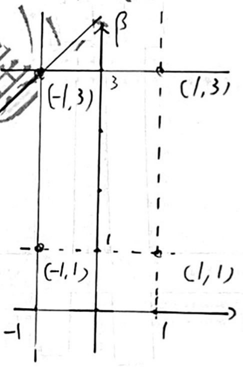
9. 已知函數 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}ax^2+bx$ 在區間 $(-1,1)$，$(1,3]$ 內各有一個極值點，求 a^2-4b 的最大值為________

16

$\boxed{9}$ $f'(x)=x^2+ax+b$

$a^2-4b=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$

$=(\alpha-\beta)^2\leq 16$



10. 設 t 為大於 0 的實數，欲使 $\int_0^t(\sin 2x-\sqrt{3}\cos 2x)dx$ 有最大值，則此時實數 t 的最小值為________。

$\frac{2\pi}{3}$

$\boxed{10}$ $F'(t)=2\sin\left(2t-\frac{\pi}{3}\right)=0$

⇒ $2t-\frac{\pi}{3}=k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

⇒ $t=\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}$

		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{4}{3}\pi$	
$F'(t)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$F(t)$	↘		↗	$F(\frac{4\pi}{3})$ max	↘

⇒ t 的 min $=\frac{4}{3}\pi$