臺北市立永春高級中學 113 學年度數學教師甄試試題

說明：請用黑色或藍色原子筆書寫

一、 填充題：每題 8 分，共 88 分。分數或根式須以最簡形式回答，否則不予計分。

$C_0^7+C_1^7+\cdots+C_7^7$
↓
$(1+2+\cdots+8)\cdot 2^7 = 9\cdot 512 = 4608$

1. 已知 $f(x)=x^3-5x^2+bx+c$，若 $f(x)=0$ 的三根為 α,β,γ，且 $f(-1)=20$，則
-26
$\begin{vmatrix} 1+\alpha & 1 & 1 \\ 1 & 1+\beta & 1 \\ 1 & 1 & 1+\gamma \end{vmatrix}=$

1 令 $f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$
$-f(-1)+2-(\alpha+1+\beta+1+\gamma+1)$
$=-20+2-8=-26$

3

元素個數	觀察元素	
1	1	$\to C_0^7$
2	1 (2, 5, 8)	$\to C_1^7$
3	1 (2,3, 5, 7,8)	$\to C_2^7$

2. 設 $\dfrac{1}{2a}+\dfrac{1}{3b}=30$，其中 a，b 為正數，求 $3\log_{\frac{1}{6}}a+2\log_{\frac{1}{6}}b$ 的最大值________
10

2 $30=\dfrac{1}{6a}+\dfrac{1}{6a}+\dfrac{1}{6a}+\dfrac{1}{6b}+\dfrac{1}{6b}\geq\dfrac{5}{6}\left(\dfrac{1}{a^3b^2}\right)^{\frac{1}{5}} \Rightarrow 6^{10}\geq(a^3b^2)^{-1} \Rightarrow 10\geq\log_6(a^3b^2)^{-1}$

3. 假設 A 為非空的有限集合，規定 $S(A)$ 表示 A 中所有元素的和；例如：$S(\{1,3,7\})=1+3+7=11$。
4608 考慮集合 $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ 中的每個非空子集合 A，試求所有這樣 $S(A)$ 的總和________。
TRML 2013 個人賽

4. 設 z 為複數，且 $|z|=1$，已知 $|z^2-z+1|$ 的最大值為 M，最小值為 m，求 M+m = ________。
3
4 令 $z=e^{i\theta}$. $\left|z+\dfrac{1}{z}-1\right|=|2\cos\theta-1|\in[0,3]$

5. 113 年永春盃網球排名賽 18 歲組單打賽共 32 名選手參賽，採單淘汰制，每名選手勢均力敵。若
$\dfrac{89}{16}$ 進入 16 強可得 3 分的積分，進入 8 強可得 5 分的積分，進入 4 強可得 10 分的積分，進入冠亞軍
or 賽可得 15 分的積分，得冠軍者可得 20 分的積分，試問每位選手拿到的積分之期望值
$\dfrac{99}{32}$ 為________

5 $\dfrac{1}{32}(16\cdot3+8\cdot5+4\cdot10+2\cdot15+1\cdot20)=\dfrac{89}{16}$ (總積分平分給32隊) or $\dfrac{1}{32}(3\cdot8+5\cdot4+10\cdot2+15\cdot1+20\cdot1)=\dfrac{99}{32}$

6. 若 $f(x)$ 為多項式，且滿足 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)-2x^3}{x^2}=1$，$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=-3$，試求 $f(x)$ 除以 $x-3$ 的餘數
54 = ________。
6 $f(x)=2x^3+x^2-3x \Rightarrow f(3)=54$

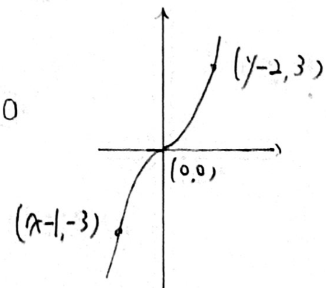
7 7. $x,y\in R$ 使得 $x^3=3x^2-5x$，$y^3=6y^2-10y+7$，試求 $x+y$ 的值 3 ________。

$x^3-3x^2+5x=0$
$h=\dfrac{3}{3}=1$
$3\cdot1^2-6\cdot1+5$
$\Rightarrow (x-1)^3+2(x-1)+3=0$

$y^3-6y^2+14y-15=0$ ($-14y+15$)
$h=\dfrac{6}{3}=2$
$3\cdot2^2-12\cdot2+14$
$\Rightarrow (y-2)^3+2(y-2)-3=0$

$\begin{array}{r|l} 1\ -6\ +14\ -15 & 2 \\ +)\quad +2\ \ -8\ \ +12 & \\ \hline 1\ -4\ \ +6\ \ -3 & \end{array}$

令 $f(t)=t^3+2t$. I.P. (0,0)



$x-1+y-2=0$
$\Rightarrow x+y=3$

2024.7.4(四)
~7.5(五)
Ru

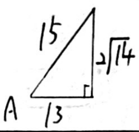
8. △ABC 中，$\overline{AB}=5$，$\overline{AC}=3$，過 A 點在直線 BC 上的垂足為 H。若（向量）$\overline{AH}=-\frac{1}{2}\overline{AB}+\frac{3}{2}\overline{AC}$，

$\frac{225\pi}{28}$ 試求△ABC 的外接圓面積

$(-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{2}\overrightarrow{AC})\cdot(-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=0$

$\overline{BC}=\sqrt{25+9-2\cdot 13}=2\sqrt{2}$

$\boxed{8}$ $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}=0 \Rightarrow 26=\frac{1}{2}(25+27)=2\cdot 5\cdot 3\cdot\cos A$



$2R=2\cdot\frac{\sqrt{2}\cdot 15}{2\sqrt{14}} \Rightarrow \pi R^2=\frac{225\pi}{28}$

9. 試求$\sin^2 50°+\sin^2 70°-\sin^2 80°$的值________

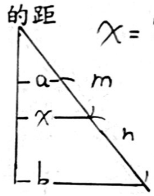
$\frac{1}{2}$

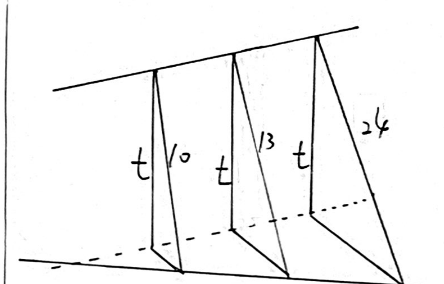
$\boxed{9}$ $\sin^2\frac{\theta}{2}=\frac{1-\cos\theta}{2} \Rightarrow \frac{1}{2}-\frac{1}{2}(\cos 100°+\cos 140°-\cos 160°)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}(2\cos 120°\cos 20°+\cos 20°)=\frac{1}{2}$

10. 空間中有兩條歪斜線 L 與 S，直線 L 上有三點 A、B、C，且 $\overline{AB}=\overline{BC}$。直線 S 上有三點 D、E、F，其中 $\overline{AD}$、$\overline{BE}$、$\overline{CF}$ 皆垂直 L。已知 $\overline{AD}=10$、$\overline{BE}=13$、$\overline{CF}=24$。試求歪斜線 L、S 的距離________。

$\frac{120}{13}$

$\boxed{10}$ 先備 $x=\frac{mb+na}{m+n}$





$2\sqrt{169-t^2}=\sqrt{100-t^2}+\sqrt{576-t^2}$

$\Rightarrow 676-4t^2=676-2t^2+2\sqrt{\ }\sqrt{\ }$

$\Rightarrow t^4=t^4-676t^2+100\times 576$

$\Rightarrow t=\frac{24\times 10}{2\times 13}=\frac{120}{13}$

91 數甲

11. 設 m 為實數，已知四次方程式$3x^4-4mx^3+1=0$無實根，求 m 的範圍為__

$-1<m<1$

$\boxed{11}$ $f'(x)=12x^2(x-m)=0$

$\Rightarrow x=0,m$

$f(0)f(m)>0$

$\Rightarrow -m^4+1>0$

$\Rightarrow (m^2+1)(m+1)(m-1)<0 \Rightarrow -1<m<1$

二、 計算題：共 12 分。須詳細過程，否則酌予扣分。

thepiano

$\boxed{1}$

1. 試求 $\sqrt{10-6\cos\theta}+\frac{1}{4}\sqrt{34-24\sqrt{2}\sin\theta}+\sqrt{19-2\sqrt{2}\cos\theta-8\sin\theta}$ 的最小值。

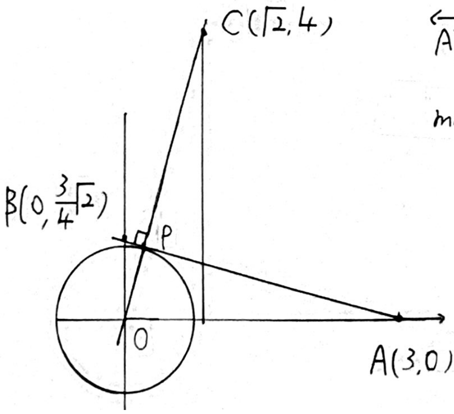
$\frac{21}{4}\sqrt{2}-1$

$24\sqrt{2}=2\cdot 4\cdot(3\sqrt{2})$, $4^2+(3\sqrt{2})^2=34$

$\sqrt{(\cos\theta-3)^2+(\sin\theta-0)^2}+\sqrt{(\cos\theta-0)^2+(\sin\theta-\frac{3}{4}\sqrt{2})^2}+\sqrt{(\cos\theta-\sqrt{2})^2+(\sin\theta-4)^2}$

$\frac{1}{4}\sqrt{(4\cos\theta-0)^2+(4\sin\theta-3\sqrt{2})^2}$

設 $P(\cos\theta,\sin\theta)$, $A(3,0)$, $B(0,\frac{3}{4}\sqrt{2})$, $C(\sqrt{2},4)$



$\overleftrightarrow{AB}: \sqrt{2}x+4y-3\sqrt{2}=0$, $d(O,\overleftrightarrow{AB})=1$

$\min=\overline{AB}+\overline{OC}-1$

$=3\sqrt{2}(1+\frac{3}{4})-1$

$=\frac{21}{4}\sqrt{2}-1$