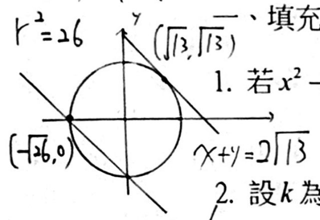
2024.7.2(二) ~7.3(三) Ru

$\boxed{1}$ $\begin{cases}\alpha^2=3\alpha-1\\ \beta^2=3\beta-1\end{cases} \Rightarrow \alpha^n+\beta^n=3(\alpha^{n-1}+\beta^{n-1})-(\alpha^{n-2}+\beta^{n-2})$; $\begin{cases}\alpha+\beta=3\\ \alpha\beta=1\end{cases}$

令 $a_n=\alpha^n+\beta^n \Longrightarrow a_n=3a_{n-1}-a_{n-2}$

$a_1=3$, $a_2=9-2=7$, $a_3=3\cdot7-3=18$, $a_4=3\cdot18-7=47$, $a_5=3\cdot47-18=123$, $a_6=3\cdot123-47=322$, $a_7=3\cdot322-123=843$

$\boxed{2}$ 令 $y=\sqrt{k-x^2}\geq 0$ $\Rightarrow x^2+y^2=k=r^2$, $r^2=26$



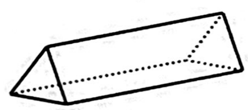
國立竹東高級中學 113 學年度第一次教師甄試數學科試卷(共 2 頁)

一、填充題(每題 7 分,共 56 分)

1. 若 $x^2-3x+1=0$,求 $x^7+\dfrac{1}{x^7}=$ $\underline{843}$。

2. 設 k 為固定的實數。已知 $x+\sqrt{k-x^2}$ 的最大值為 $2\sqrt{13}$,求 $x+\sqrt{k-x^2}$ 的最小值 $=\underline{-\sqrt{26}}$。

3. 在直角坐標空間中,若三個平面 $E_1: x-2y+z=0$, $E_2: x+y-2z=0$, $E_3: 2x-y-z=12$ 及兩個平行的平面 $F_1: x+y+z=0$, $F_2: x+y+z=k$ 圍出一個體積為 30 的三角柱(如圖所示),求 $k=\underline{\pm\frac{15}{4}}$。

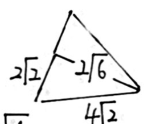


$\boxed{3}$ 法1 $|\cos\alpha|=|\cos\beta|=|\cos\gamma|=\frac{1}{2}\Rightarrow$ 正△

$\begin{matrix}1 & -2 & 1 & 1 & -2 & 1\\ 1 & 1 & -2 & 1 & 1 & -2\\ & 3 & 3 & 3 & & \end{matrix}$ $\Rightarrow L: \frac{x}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1}$

E_1, E_2 過 $(0,0,0)$

$d(L,E_3)=\frac{12}{\sqrt6}=2\sqrt6$



$\frac{\sqrt3}{4}\cdot(4\sqrt2\cdot4\sqrt2)\cdot\frac{|k|}{\sqrt3}=30 \Rightarrow k=\pm\frac{15}{4}$

$\boxed{3}$ 法2 $\begin{cases}E_1\\E_2\\F_1\end{cases}\Rightarrow A(0,0,0)$, $\begin{cases}E_1\\E_3\\F_1\end{cases}\Rightarrow B(4,0,-4)$, $\begin{cases}E_2\\E_3\\F_1\end{cases}\Rightarrow C(4,-4,0)$

$\begin{matrix}1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1\\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0\\ & -1 & -1 & -1 & & \end{matrix}$

$\frac{1}{2}\cdot4\cdot4\cdot\sqrt3\cdot\frac{|k|}{\sqrt3}=30 \Rightarrow k=\pm\frac{15}{4}$

4. 在直角坐標平面上,圓 $x^2+y^2=1$ 被 $A=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&3\\0&1\end{bmatrix}$ 變換為曲線 Γ,求 Γ 的方程式為 $\underline{10x^2-6xy+y^2=1}$

$\boxed{4}$ $\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1\\1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}0&1\\1&3\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}-3&1\\1&0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3&1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3x'+y'\\x'\end{bmatrix}$

$\Rightarrow (-3x+y)^2+x^2=1 \Rightarrow 10x^2-6xy+y^2=1$

5. 設 $a_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\frac{2k-1}{\sqrt{n^2+(2k-1)^2}}$,求 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\underline{\frac{\sqrt5-1}{2}}$

$\boxed{5}$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\frac{2\left(\frac{k}{n}\right)-\frac{1}{n}}{\sqrt{1+4\left(\frac{k-\frac12}{n}\right)^2}}\to\int_0^1\frac{2x}{\sqrt{1+4x^2}}dx$

令 $u=4x^2+1$, $du=4\cdot2x\,dx$

$\displaystyle\frac14\int_1^5\frac{1}{\sqrt u}du=\frac{\sqrt5-1}{2}$

6. 連續投擲一個公正的骰子 10 次,求 10 次中,正面曾連續出現兩次或兩次以上的機率為 $\underline{不計分}$

7. 若實數 a,b,c 滿足 $\frac{a}{3}+\frac{b}{4}+\frac{c}{6}=\frac{a}{4}+\frac{b}{5}+\frac{c}{7}=\frac{a}{6}+\frac{b}{7}+\frac{c}{9}=1$,則 $a+b+c=\underline{17}$

$\boxed{7}$ $\begin{bmatrix}4&3&2&12\\35&28&20&140\\21&18&14&126\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}4&3&2&12\\5&2&0&-20\\7&3&0&-42\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}4&3&2&12\\1&0&0&24\\7&3&0&-42\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&24\\0&1&0&-70\\0&0&1&63\end{bmatrix}$

和 $=17$

8. 設 $a_1=7$,且對於大於 1 的正整數 n,皆滿足 $a_n=a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}$,求無窮級數和 $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}+\cdots=\underline{\frac37}$

$\boxed{8}$ $a_1=7$, $a_2=7$, $a_3=7\times2$, $a_4=7\times4$, $a_5=7\times8$

$\frac17+\frac{\frac17}{1-\frac12}=\frac37$

$\boxed{1}$ $\displaystyle\sum_{k=3}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot\frac{k!}{3!(k-3)!}=\frac{n(n-1)(n-2)}{3\cdot2}\boxed{\sum_{k=3}^{n}C_{k-3}^{n-3}}\to 2^{n-3}=2^{n-4}\cdot 2$

法1：

$=\dfrac{1}{3}\cdot 2^{n-4}\cdot n(n-1)(n-2)$

法2："$\displaystyle\sum_{k=i}^{n}C_k^nC_i^k=C_i^n\cdot 2^{n-i}$"

$\displaystyle\sum_{k=3}^{n}C_k^nC_3^k=\sum_{k=3}^{n}C_{n-k}^{n}\cdot C_3^k=C_3^n\cdot 2^{n-3}$

n個物品分3群

先取3個

3個 | k-3個 n-k個 → 剩n-3個

分到2群

(米氏幸福)

二、計算證明題(共 44 分)

1. 設正整數 $n\geq 3$。化簡 $\displaystyle\sum_{k=3}^{n}C_k^n\cdot C_3^k$。 (10 分)

$\dfrac{1}{3}\cdot 2^{n-4}(n-2)(n-1)n$

$\boxed{2}$ (1)

$\pi\displaystyle\int_{-1}^{1}(1-x^2)^3dx$

2. 在直角坐標空間中，設曲線 $\Gamma_n: y=\sqrt{(1-x^2)^n}$ (而且 $z=0$) 是 xy 平面上的曲線，其中 n 為正整數。將 Γ_n 和 x 軸在 xy 平面上所圍出的區域繞 x 軸旋轉，得到空間中一個立體，令其體積為 V_n。

$\displaystyle\int_0^1(1-3x^2+3x^4-x^6)dx$

$=\left(x-x^3+\frac{3}{5}x^5-\frac{1}{7}x^7\right)\Big|_0^1$

(1) 求 V_3。 $\dfrac{32\pi}{35}$ (5 分)

$\Rightarrow \dfrac{16}{35}\times 2\pi$

$=\dfrac{32}{35}\pi$

(2) 試證：$\dfrac{V_{n+1}}{V_n}=\dfrac{2n+2}{2n+3}$。 (9 分)

3. 設 $x\in\mathbb{R}$，且 $y=\dfrac{4-3\sin x}{2+\cos x}$，試求 y 值的範圍。(10 分) $\dfrac{8-\sqrt{43}}{3}\leq y\leq\dfrac{8+\sqrt{43}}{3}$

$\boxed{3}$ $|y\cos x+3\sin x|=|4-2y|\leq\sqrt{y^2+9}$

$\Rightarrow 3y^2-16y+7\leq 0$

$\Rightarrow \dfrac{8-\sqrt{43}}{3}\leq y\leq\dfrac{8+\sqrt{43}}{3}$

$256-84=172=4\cdot 43$

4. $\overline{AB}$ 為圓 $x^2+y^2=37$ 上的一弦，若點 $P(1,2)$ 在 $\overline{AB}$ 上，且剛好為 $\overline{AB}$ 的其中一個三等分點，試求直線 AB 的方程式。 (10 分) $x=1$ or $3x-4y+5=0$

$\boxed{2}$ (2)

$V_{n+1}=2\pi\cdot\boxed{\displaystyle\int_0^1(1-x^2)^{n+1}dx}\overset{令}{=}I_{n+1}$

$V_n=2\pi\cdot\boxed{\displaystyle\int_0^1(1-x^2)^{n}dx}\overset{令}{=}I_{n}$

$u=(1-x^2)^{n+1}$ $\quad dv=dx$

$du=(n+1)(1-x^2)^n(-2x)$ $\quad v=x$

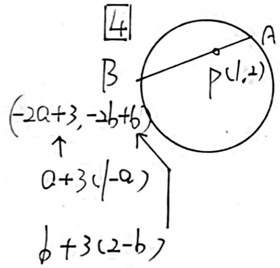
$I_{n+1}=x(1-x^2)^{n+1}\Big|_0^1$

$+2(n+1)\displaystyle\int_0^1(1-x^2)^n(1-(1-x^2))dx$

$=2(n+1)(I_n-I_{n+1})$

$\Rightarrow \dfrac{V_{n+1}}{V_n}=\dfrac{I_{n+1}}{I_n}=\dfrac{2n+2}{2n+3}$

$\boxed{4}$



$\begin{cases}a^2+b^2=37\\(-2a+3)^2+(-2b+6)^2=37\end{cases}$

$\Rightarrow 156=12a+24b$

$\Rightarrow\begin{cases}a^2+b^2=37\\a=-2b+13\end{cases}\Rightarrow 5b^2-52b+132=0$

$\Rightarrow A(1,6)\overset{P(1,2)}{\Longrightarrow}x=1$

or $A\left(\dfrac{21}{5},\dfrac{22}{5}\right)$, $m_{PA}=\dfrac{12}{16}=\dfrac{3}{4}\Rightarrow 3x-4y=-5$

Created with Scanner Pro