

國立嘉科實驗高級中學

113學年度雙語部教師甄選

數學科 試題

作答注意事項

1. 本試題共三部分：非選擇題，共計 100 分。
2. 非選擇題限用藍色、黑色原子筆或鋼筆在答案本上作答。
3. 作答時，請於答案本上清楚標示試題本上之題號。
4. 本科不可以使用電子計算器。

凡答用

第一部份 填充題 50%

1. 已知 $z = x + yi$ ($x, y \in R, x \neq 0$) 且 $|z - 2| = \sqrt{3}$ ，則 $\frac{y}{x}$ 的最大值為 _____。(5 分)

ANS : $\sqrt{3}$

2. 請解出下列方程組實數解(以數對形式呈現) (5 分)

$$\log_9 x + \log_9 y + \log_3 z = 2$$

$$\log_{16} x + \log_4 y + \log_{16} z = 1$$

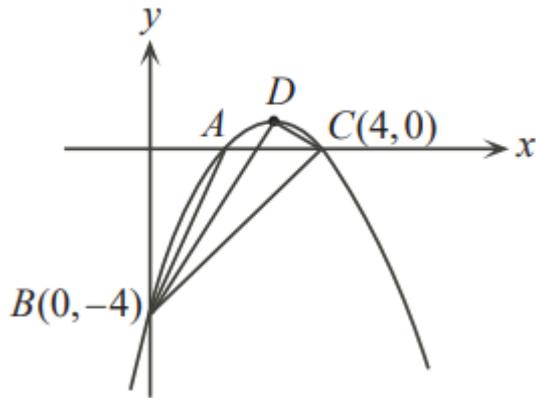
$$\log_5 x + \log_{25} y + \log_{25} z = 0$$

ANS : $(x, y, z) = \left(\frac{1}{6}, \frac{8}{3}, \frac{27}{2}\right)$

3. $f(x) = \frac{2x}{ax+b}$ ， $f(1) = 1$ ， $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3}$ ，若數列 $\{x_n\}$ 滿足 $x_{n+1} = f(x_n)$ ，且 $x_1 = \frac{1}{2}$ ，求 x_n 的一般式為 _____。(5 分)

ANS : $x_n = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}$

4. 如圖一拋物線頂點為 D ，與 x 軸交點為 A 、 $C(4,0)$ ，與 y 軸交點為 $B(0,-4)$ 。若 $\triangle ABC$ 之面積為 4，試求 $\triangle DBC$ 之面積。(5 分)



ANS : 3

5. 甲乙兩人輪流擲一公正硬幣，第一局甲先擲，以先擲出正面者為勝，而上一局的輸者下一局可先擲，試求第 n 局甲勝的機率為_____。(以 n 表示) (5 分)

$$\text{ANS : } \frac{1}{2} \left[1 - \left(-\frac{1}{3} \right)^n \right]$$

6. 已知 $A(4,0), B(2,2)$ 是橢圓 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ 內的點，若 M 為橢圓上動點，則 $\overline{MA} + \overline{MB}$ 的最大值為_____。(5 分)

$$\text{ANS : } 10 + 2\sqrt{10}$$

7. 有甲乙丙...庚 7 名同學參加 5 個運動項目，今要求甲、乙兩同學不能參加同一個項目，每個項目都要有人參加且每人只能參加一個項目，則滿足上述要求有_____種不同的參賽組合。(5 分)

ANS : 15000

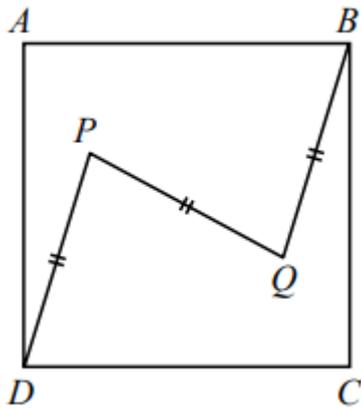
8. $0 < k < 18$ 且 k 為整數，若 $\frac{5\sin(10k^\circ)-2}{\sin^2(10k^\circ)} \geq 2$ ，則 k 有多少可能之值？(5分)

ANS : 13

9. 一生鮮超市向甲、乙兩供應商購買哈密瓜。甲供應商哈密瓜來自有機農場，其所栽植之哈密瓜直徑近似常態分配，甲供應商哈密瓜直徑之平均值為 133 mm，標準差為 5 mm。乙供應商哈密瓜來自非有機農場，其所供應之哈密瓜直徑大於 137 mm 的機率為 0.8413。該生鮮超市之哈密瓜有七成為甲供應商所供應，三成為乙供應商所供應。若標準常態分配 $Z > 0.8$ 之機率為 0.2119，向該生鮮超市隨機選購一顆哈密瓜，已知哈密瓜直徑大於 137 mm，則該顆哈密瓜來自於甲供應商的機率為何？(5分)

ANS : $\frac{14833}{40072}$

10. 如圖， P 、 Q 為正方形 $ABCD$ 內兩點使得 $\overline{DP} \parallel \overline{BQ}$ 且 $\overline{DP} = \overline{PQ} = \overline{BQ}$ ，則 $\angle ADP$ 之最小可能為何？(5分)



ANS : 15°

第二部份 計算證明題 30%

1. 已知平面內動點 P 到 $F(1,0)$ 的距離與點 P 到 y 軸的距離差為 1，求：

(1) 此動點 P 的軌跡方程式？(4 分)

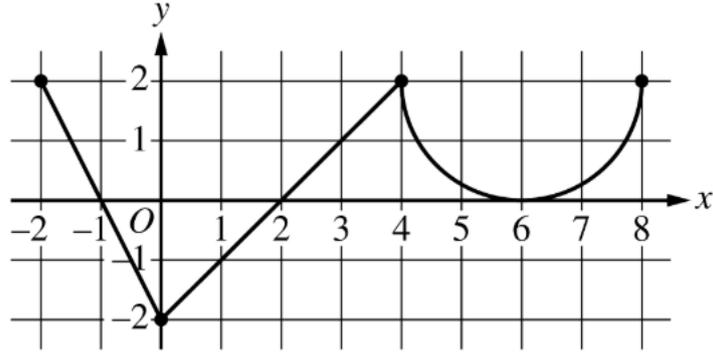
(2) 過 F 做兩條互相垂直的直線 L_1, L_2 。設 L_1 與 P 點軌跡相交於

點 A 和 B ， L_2 與 P 點軌跡相交於點 C 和 D ，求 $\overline{AD} \cdot \overline{CB}$ 的最

小值？(6 分)

2. 一函數 $f(x)$ 之定義域為閉區間 $[-2,8]$ 且滿足 $f(2) = 1$ 。該函數之

一階導數圖形 $f'(x)$ 包含兩線段及一半圓(如圖)，試回答下列問題：



- (1) 試說明該函數 $f(x)$ 在 $x = 6$ 是否有極值？(2分)
- (2) 請找出該函數 $f(x)$ 在那些區間圖形為凹口向下？(3分)
- (3) 試求 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{6f(x) - 3x}{x^2 - 5x + 6}$ 之值，或證明該值不存在。(5分)

3. 設 a 、 b 、 c 為三角形的三邊長， Δ 為此三角形面積，試證：

$$\Delta \leq \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{a+b+c}{3} \right)^2, \text{ 且等號成立於 } a=b=c. \text{ (10分)}$$

第三部份 英文申論題佔 20%

1. IBSCY (嘉科實中雙語部簡稱，英文全銜為 International Bilingual School at Chiayi Science Park) operates within a science park and is committed to interdisciplinary education as a foundational vision. The school adopts the New Pedagogies for Deep Learning (NPDL), which emphasizes six global competencies for student development: Collaboration, Creativity, Critical Thinking, Citizenship, Character, and Communication. Drawing upon your teaching experience, please select a unit from senior high school Mathematics in Taiwan and design an interdisciplinary lesson plan. Ensure the plan integrates at least one NPDL global competency. The format and duration of the lesson plan are open-ended.(20%) (Please write down your answer in English.)