

4个A不相鄰 - (至少2个B相鄰 U 至少2个C相鄰)

$$\frac{6!}{3!3!} \cdot C_4^7 - \left[\left(\frac{5!}{3!} \cdot C_4^6 - \frac{4!}{3!} \cdot C_4^5 \right) \cdot 2 - \left(4! \cdot C_4^5 - 3! \cdot C_4^4 \right) \cdot 2 \right]$$

$$= 248$$

桃園市立陽明高中 113 學年度教師甄選

2024. 6. 26 (三)

~ 7. 1 (一) Ru

數學科筆試測驗題目卷

待整理

一、填充題：(12 題，每題 5 分，共 60 分)

填充 9

1. $\triangle ABC$ 三邊所在的直線分別為 $L_1: 3x - 4y = 6$, $L_2: 11x + 2y = 22$ 及 L_3 。已知 L_1 與 L_2 的交點為 A , \overline{AD} 為 \overline{BC} 邊上的高，且 D 點坐標為 $(-2, -8)$, 則 $\triangle ABC$ 面積為何? 50

2. 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{80}{n} \left[\left(\frac{3}{n} \right)^4 + \left(\frac{8}{n} \right)^4 + \left(\frac{13}{n} \right)^4 + \dots + \left(\frac{5k-2}{n} \right)^4 + \dots + \left(\frac{5n-2}{n} \right)^4 \right]$ 之值為何? 10000

2. $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{5k-2}{n} \right)^4 \rightarrow 80 \cdot 5^4 \int_0^1 x^4 dx = 80 \cdot 125 = 10000$

3

46

$$= 2 + 25 \quad | \quad 6 \times 4$$

$$= 10 + 36 \quad | \quad 3 \times 2$$

$$= 6 + 40 \quad | \quad 1 \times 1$$

3. 一組 12 個數：3, 6, 7, 10, 11, 14, 21, 25, 33, 36, 40, 42。從中任取 4 個不同的數，則這 4 個不同數的中位數為 23 的機率為何? $\frac{31}{495}$

$$= \frac{31}{\frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{4 \cdot 3 \cdot 2}} = \frac{31}{495}$$

4. AAAA BBBCCC 排成一列，相同字母不相鄰的排法有多少種? 248

5. 請計算 $22^{17} + 24^{17}$ 除以 529 的餘數為何? 253

5

$$529 = 23^2$$

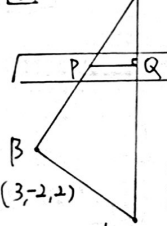
$$(-1+23)^{17} = C_0^{17} \cdot 23^0 \cdot (-1)^{17} + C_1^{17} \cdot 23^1 \cdot (-1)^{16} + \dots = 2 \cdot 17 \cdot 23 \equiv 782 \equiv 253 \pmod{529}$$

$$(1+23)^{17} = C_0^{17} \cdot 23^0 + C_1^{17} \cdot 23^1 + \dots$$

6

$$A(1, -4, 4)$$

6. 已知空間中 $\triangle ABC$ 的三頂點分別為 $A(1, -4, 4), B(3, -2, 2), C(4, 2, -2)$, 有一平面 $E: x + by + cz + d = 0$ 分別交於 $\overline{AB}, \overline{AC}$ 於 P, Q 兩點，且 \overline{AC} 垂直平面 E , 若 $\triangle ABC$ 面積為 $\triangle APQ$ 面積的 30 倍，求 d 的值為何? $d = 12$



面 $E: x + by + cz + d = 0$ 分別交於 $\overline{AB}, \overline{AC}$ 於 P, Q 兩點，且 \overline{AC} 垂直平面 E , 若 $\triangle ABC$ 面積為 $\triangle APQ$ 面積的 30 倍，求 d 的值為何? $d = 12$

$$\triangle ABC \text{ 面積} = 3\sqrt{2} = \frac{1}{2} \cdot 5\sqrt{2} \cdot t^2 \cdot 30$$

$$\overrightarrow{AC} = (3, 6, -6) = 3(1, 2, -2) \quad \left| \begin{array}{ccc} 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right| \cos A = \frac{5}{3\sqrt{3}} \Rightarrow d(A, E) = \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{3} |d - 15|$$

$$\overrightarrow{AB} = (2, 2, -2) = 2(1, 1, -1) \quad \left| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{array} \right| \cos A = \frac{5}{3\sqrt{3}} \Rightarrow d(A, E) = \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{3} |d - 15|$$

$$E: x + 2y - 2z + d = 0 \Rightarrow d - 15 = 3 \text{ or } -3$$

7

7. 整係數方程式 $x^2 + (m+1)x - 3(m+1) = 0$ 有整數解，求 m 的值為何? 3, -1, -13, -17

$$x = \frac{-(m+1) \pm \sqrt{D}}{2}$$

$$D = (m+1)(m+3) \geq 0 \Rightarrow (m+7+k)(m+7-k) = 36$$

$$x \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow m \geq -1 \text{ or } m \leq -3$$

$$L_1 \text{ 相減} = 2k$$

$m+7+k$	$m+7-k$	k	m
18	2	8	3
6	6	0	-1
-2	-18	8	-17
-6	-6	0	-13

$$\Rightarrow D \geq 0$$

$$D = (m+1)^2 - 36 = k^2$$

偶 偶
奇 奇

(D 為完全平方)

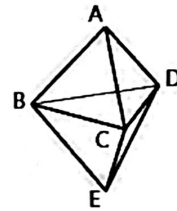
$$\boxed{7} \quad \sin\theta + i \cos\theta = \cos 4\theta + i \sin 4\theta$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin\theta = \cos 4\theta \\ \cos\theta = \sin 4\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos 5\theta = 0 \\ \cos\theta = \sin 4\theta \end{cases} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k=0,1,2,3,4$$

8. 坐標平面上，設單位圓上一點 P ， \overline{OP} 與 x 軸正向夾角為 θ 。今對 P 做以下兩種線性變換：「以原點 O 為圓心將 P 旋轉 3θ 」，與「將 P 對 $L: y=x$ 鏡射」，變換後得相同 Q 點，則滿足此條件的 P 點有多少個？ 5

9. 陽明高中校內數學競賽共有 12 道題目，出題老師將這 12 道題目依照難度分成 1 到 12，如果希望出題時難度為 k 的題目排在難度為 $k+2$ 的題目之前，且已知 $1 \leq k \leq 10$ ，則將會多少種出題方式？ $9 \cdot 4$

10. 如右圖，一個永恆生命體在此立體中的 5 個頂點間移動：從 A 點出發，每經過一個單位時間，就隨機移動到相鄰的頂點上，永不停歇。則此永恆生命體在長久未來達成穩定平衡的情況下，出現在 A 點的機率為何？ $\frac{1}{6}$



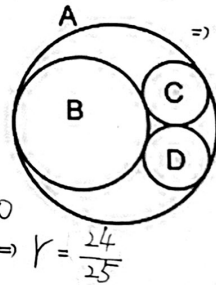
11. 若曲線 $y = 2x - x^2$ 與 x 軸所圍部分面積被直線 $y = mx$ 二等分，則 m 的值為何？ $2 - \sqrt[3]{4}$

$$\int_0^2 (-x^2 + 2x) dx = \frac{-x^3}{3} + 2x = \frac{8}{3} + 4 = \frac{20}{3}$$

$$\int_0^{2-m} (-x^2 + 2x - mx) dx = -\frac{1}{3}(2-m)^3 + \frac{1}{2}(2-m)^3 = \frac{1}{6}(2-m)^3 = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow 2-m = 4^{\frac{1}{3}} \Rightarrow m = 2 - 4^{\frac{1}{3}}$$

12. 如右圖，圓 B 、 C 、 D 兩兩外切並都與圓 A 內切，若圓 A 半徑為 3，圓 B 半徑為 2，圓 C 與圓 D 全等，則圓 C 半徑為何？ $\frac{24}{25}$



$$\sqrt{(r+2)^2 - r^2} = \sqrt{(3-r)^2 - r^2} + 1 \Rightarrow \sqrt{4r+4} = \sqrt{-6r+9} + 1$$

$$\Rightarrow 4r+4 = -6r+9 + 2\sqrt{-6r+9} \Rightarrow (5r-3)^2 = -6r+9 \Rightarrow 25r^2 - 24r = 0$$

$$\Rightarrow r = \frac{24}{25}$$

$$\boxed{10} \quad \begin{matrix} A & B & C & D & E \\ A & \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \end{bmatrix} \\ B & \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ 0 \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix} \\ C & \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ 0 \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix} \\ D & \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ 0 \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix} \\ E & \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ 0 \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \frac{1-2\alpha}{3} \\ \frac{1-2\alpha}{3} \\ \frac{1-2\alpha}{3} \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \frac{1-2\alpha}{4 \cdot 3} \cdot 3 = \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{1}{6}$$