國立基隆女中 113 學年第 2 次教師甄試 筆試答案 數學科

一、 填充題(每題 4 分，共 52 分)

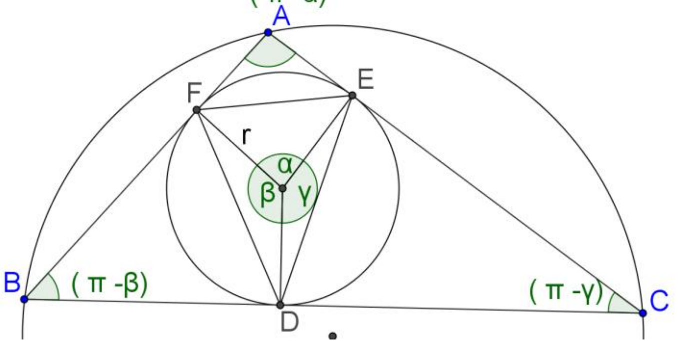
1. 48	2. 58	3. $\sqrt{3}:1:1$	4. 108	5. $\sqrt{5}-2$
6. -2	7. $(4,-1,0)$	8. $\begin{cases} x=t \\ y=3t \\ z=-3t \end{cases}, t\in\mathbf{R}$	9. 393192	10. $\frac{72}{5}$
11. $\frac{56}{3}$	12. $\frac{28}{5}$	13. $\sqrt{15}$		

二、 計算證明題(每題 8 分，詳細寫出計算過程)

1. 【證明】如下圖，令$\triangle ABC$三邊長為a,b,c，將內心與三切點連線，可將圓分成三個角度，分別為α,β,γ，而這三個角度與$\triangle ABC$的內角分別對應互補。$\triangle DEF$的面積可利用這三條連線切成三個三角形計算，可知$\triangle DEF=\triangle DIF+\triangle EIF+\triangle DIE=\left(\frac{r^2}{2}\right)(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)$，

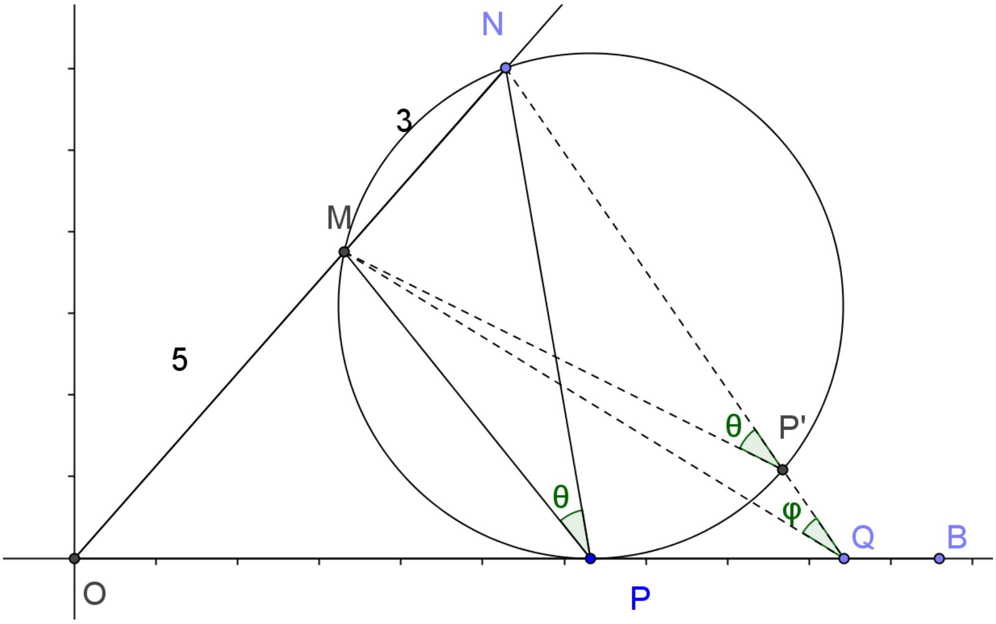
由於互補的關係，可將$(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)$換成$(\sin(\pi-\alpha)+\sin(\pi-\beta)+\sin(\pi-\gamma))$，再利用正弦定理代換成$\left(\frac{a}{2R}+\frac{b}{2R}+\frac{c}{2R}\right)$，因此

$\triangle DEF=\left(\frac{r^2}{2}\right)\left(\frac{a}{2R}+\frac{b}{2R}+\frac{c}{2R}\right)=\left(\frac{r^2}{2R}\right)\left(\frac{a+b+c}{2}\right)=\frac{r^2s}{2R}$。所求$\frac{\triangle DEF面積}{\triangle ABC面積}=\frac{\frac{r^2s}{2R}}{rs}=\frac{r}{2R}$



2. 當 $\overline{OP}=\sqrt{\overline{OM}\times\overline{ON}}$ 可使 $\angle MPN$ 最大

【詳解】



過 M、N 做一圓與 $\overline{BO}$ 相切，則此圓與 $\overline{BO}$ 切點即為所求 P。

此時利用圓冪定理 $\overline{OP}^2=\overline{OM}\times\overline{ON}$，可得 $\overline{OP}=\sqrt{\overline{OM}\times\overline{ON}}$。

【備註】證明方式為在 $\overline{OB}$ 上另取一點 Q 異於 P，則由於圓周角 $\angle MPN=\angle MP'N$，可知

$\angle MPN=\angle MP'N=\angle P'MQ+\angle MQN>\angle MQN$。

3. 橢圓$\Gamma_1:\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$的長軸在$x$軸上，

可得θ為$y=2x$的斜角，即$\tan\theta=2\Rightarrow\sin\theta=\dfrac{2}{\sqrt{5}},\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$。

設(x,y)為橢圓Γ_2上的任意一點，由Γ_1上的某一點(s,t)以原點O為中心，

依逆時針方向旋轉θ角後得到。

因此，利用旋轉矩陣可得$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s\\t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{\sqrt{5}} & -\dfrac{2}{\sqrt{5}}\\ \dfrac{2}{\sqrt{5}} & \dfrac{1}{\sqrt{5}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s\\t\end{bmatrix}$，

因此，$\begin{bmatrix}s\\t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{\sqrt{5}} & -\dfrac{2}{\sqrt{5}}\\ \dfrac{2}{\sqrt{5}} & \dfrac{1}{\sqrt{5}}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{\sqrt{5}} & \dfrac{2}{\sqrt{5}}\\ -\dfrac{2}{\sqrt{5}} & \dfrac{1}{\sqrt{5}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{\sqrt{5}}(x+2y)\\ \dfrac{1}{\sqrt{5}}(-2x+y)\end{bmatrix}$。

因為(s,t)滿足橢圓Γ_1的方程式，即$\dfrac{s^2}{9}+\dfrac{t^2}{4}=1$，

所以$\dfrac{\frac{1}{5}(x+2y)^2}{9}+\dfrac{\frac{1}{5}(-2x+y)^2}{4}=1$，

展開可得$\dfrac{x^2+4xy+4y^2}{45}+\dfrac{4x^2-4xy+y^2}{20}=1$，

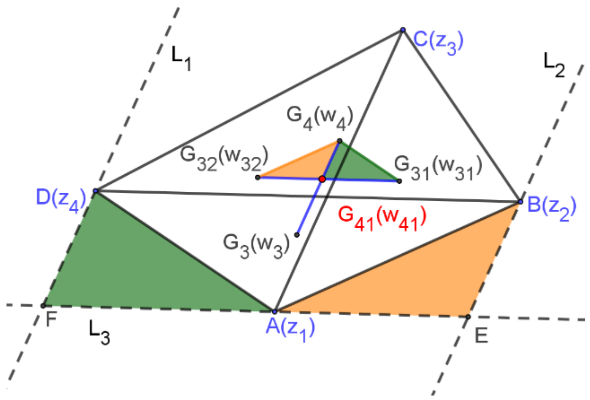
整理得$40x^2-20xy+25y^2=180$。

故橢圓Γ_2的方程式為$8x^2-4xy+5y^2-36=0$。

4. 如圖，作任意四邊形 $ABCD$，連接對角線，將其作兩組切割，得到「ΔABC 跟 ΔACD」以及「ΔDAB 跟 ΔDBC」，其中 $G_{31},G_{32},G_3,G_4,G_{41}$ 分別為 $\Delta ABC,\Delta ACD,\Delta DAB,\Delta DBC,$ 四邊形 $ABCD$ 的重心。

通過點 D,B 作平行 $\overline{AC}$ 的直線 L_1,L_2，再通過點 A 作平行 $\overline{BD}$ 的直線 L_3，其中 L_1 與 L_3 交於 F 點，L_2 與 L_3 交於 E 點。

(1)令 $A,B,C,D,G_{31},G_{32},G_3,G_4$ 的複數表示法為 $z_1,z_2,z_3,z_4,w_{31},w_{32},w_3,w_4$，



則由三角形的重心公式可知：

$w_{31}=\dfrac{z_1+z_2+z_3}{3}, w_{32}=\dfrac{z_1+z_3+z_4}{3}, w_3=\dfrac{z_1+z_2+z_4}{3}, w_4=\dfrac{z_2+z_3+z_4}{3}$，

而由 $w_{32}-w_{31}=\dfrac{z_1+z_3+z_4}{3}-\dfrac{z_1+z_2+z_3}{3}=\dfrac{z_4-z_2}{3}$，可得 $\overrightarrow{G_{31}G_{32}}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{BD}$，

同理，$\overrightarrow{G_3G_4}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}$，

故 $\overrightarrow{G_{31}G_{32}}//\overrightarrow{BD}$ 且 $\overrightarrow{G_3G_4}//\overrightarrow{AC}$，則 $\overrightarrow{G_{31}G_{32}}//L_3$ 且 $\overrightarrow{G_3G_4}//L_1//L_2$；

又由 $w_{31}-w_4=\dfrac{z_1+z_2+z_3}{3}-\dfrac{z_2+z_3+z_4}{3}=\dfrac{z_1-z_4}{3}$，可得 $\overrightarrow{G_4G_{31}}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{DA}$，

同理，$\overrightarrow{G_4G_{32}}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{BA}$，

故 $\overrightarrow{G_4G_{31}}//\overrightarrow{DA}$ 且 $\overrightarrow{G_4G_{32}}//\overrightarrow{BA}$。

而向量兩兩平行時，其夾角會相同，因此 $\angle G_4G_{41}G_{31}=\angle DFA$ 且 $\angle G_4G_{31}G_{41}=\angle DAF$，

由 AA 相似，可得 $\Delta G_4G_{31}G_{41}\sim\Delta DAF$，故 $\dfrac{\overline{G_{41}G_4}}{\overline{G_{41}G_{31}}}=\dfrac{\overline{FD}}{\overline{FA}}$；

同理可得：$\Delta G_4G_{32}G_{41}\sim\Delta BAE$，故 $\dfrac{\overline{G_{41}G_{32}}}{\overline{G_{41}G_4}}=\dfrac{\overline{EA}}{\overline{EB}}$；

又四邊形 $DFEB$ 為平行四邊形，故 $\overline{FD}=\overline{EB}$，

因此 $\dfrac{\overline{G_{41}G_{32}}}{\overline{G_{41}G_{31}}}=\dfrac{\overline{G_{41}G_{32}}}{\overline{G_{41}G_4}}\times\dfrac{\overline{G_{41}G_4}}{\overline{G_{41}G_{31}}}=\dfrac{\overline{EA}}{\overline{EB}}\times\dfrac{\overline{FD}}{\overline{FA}}=\dfrac{\overline{EA}}{\overline{FA}}$。

(2)因 L_1 平行 $\overline{AC}$，ΔCDA 與 ΔCFA 的高同為 L_1 到 $\overline{AC}$ 的距離，又底邊同為 $\overline{AC}$，

所以 $S_{\Delta ACD}=S_{\Delta ACF}$，

同理，$S_{\Delta ABC}=S_{\Delta AEC}$，

而 ΔACF 與 ΔAEC 的高皆為點 C 到 L_3 的距離，因此 $\dfrac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta ACD}}=\dfrac{S_{\Delta AEC}}{S_{\Delta ACF}}=\dfrac{\overline{EA}}{\overline{FA}}$。

由(1)(2)可得，$\dfrac{\overline{G_{41}G_{32}}}{\overline{G_{41}G_{31}}}=\dfrac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta ACD}}$ 。

即：連接四邊形的對角線，將其切割為兩個三角形時，「四邊形的重心到此兩個三角形重心之距離比值」和「此兩個三角形面積比值的倒數」相等。

5.

《解法一》高一-配方法

$$\frac{x}{\ell(x)}=\frac{x}{\sqrt{(x-4)^2+9}}=\frac{x}{\sqrt{x^2-8x+25}}=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{8}{x}+\frac{25}{x^2}}}=\frac{1}{\sqrt{25(\frac{1}{x^2}-\frac{8}{25x}+\frac{16}{625})+1-\frac{16}{25}}}$$

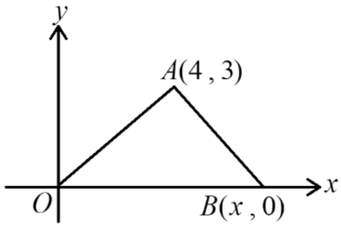
$$=\frac{1}{\sqrt{25(\frac{1}{x}-\frac{4}{25})^2+\frac{9}{25}}}$$

當$\dfrac{1}{x}=\dfrac{4}{25}$時，$\dfrac{x}{\ell(x)}$有最大值為$\dfrac{1}{\sqrt{\frac{9}{25}}}=\dfrac{5}{3}$

《解法二》高一-正弦定理

$\dfrac{x}{\ell(x)}=\dfrac{\overline{OB}}{\overline{AB}}$，利用正弦定理知$\dfrac{\overline{OB}}{\sin A}=\dfrac{\overline{AB}}{\sin\angle AOB}$

因此$\dfrac{x}{\ell(x)}=\dfrac{\sin A}{\sin\angle AOB}=\dfrac{\sin A}{\frac{3}{5}}\le\dfrac{\sin 90^\circ}{\frac{3}{5}}=\dfrac{5}{3}$



《解法三》高二-柯西不等式

$\dfrac{x}{\ell(x)}=\dfrac{x}{\sqrt{(x-4)^2+9}}$，由柯西不等式知：$\left((x-4)^2+3^2\right)\left(3^2+4^2\right)\ge\left(3(x-4)+12\right)^2$

$$\Rightarrow\left((x-4)^2+9\right)\cdot 25\ge(3x)^2\quad\Rightarrow\frac{25}{9}\ge\frac{x^2}{(x-4)^2+9}\quad\Rightarrow\frac{x}{\sqrt{(x-4)^2+9}}\le\frac{5}{3}$$

《解法四》高三-實數解觀點

$\dfrac{x}{\ell(x)}=\dfrac{x}{\sqrt{(x-4)^2+9}}$，先取平方得$\dfrac{x^2}{x^2-8x+25}\overset{令}{=}y\quad\Rightarrow x^2=x^2y-8xy+25y$

$\Rightarrow(y-1)x^2+(-8y)x+(25y)=0$，二次方程式有實數解得$D\ge 0$

$$\Rightarrow(-8y)^2-4(y-1)\cdot 25y\ge 0\quad\Rightarrow 16y^2-25y(y-1)\ge 0\quad\Rightarrow -9y^2+25y\ge 0$$

$\Rightarrow y(9y-25)\le 0\quad\Rightarrow 0\le y\le\dfrac{25}{9}$，因此$0\le\dfrac{x}{\ell(x)}\le\sqrt{\dfrac{25}{9}}$，最大值為$\sqrt{\dfrac{25}{9}}=\dfrac{5}{3}$

《解法五》高三-微分(導函數)

$\dfrac{x}{\ell(x)}=\dfrac{x}{\sqrt{(x-4)^2+9}}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-8x+25}}$ ，

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2-8x+25}}\right)=\frac{1\cdot\sqrt{x^2-8x+25}-x\cdot\frac{1}{2}\frac{2x-8}{\sqrt{x^2-8x+25}}}{x^2-8x+25}\overset{令}{=}0$$

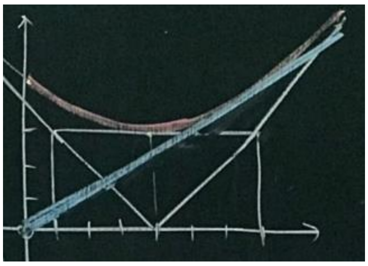
$x^2-8x+25-x(x-4)=0\quad\Rightarrow x=\dfrac{25}{4}$ ，

在 $x>\dfrac{25}{4}$ 時，一階導數 <0 ， $x<\dfrac{25}{4}$ 時，一階導數 >0

因此在 $x=\dfrac{25}{4}$ 時， $\dfrac{x}{\ell(x)}$ 有最大值為 $\dfrac{\frac{25}{4}}{\sqrt{(\frac{25}{4}-4)^2+9}}=\dfrac{\frac{25}{4}}{\sqrt{\frac{81}{16}+9}}=\dfrac{25}{\sqrt{225}}=\dfrac{25}{15}=\dfrac{5}{3}$

《解法六》高三-雙曲線

令 $y=\ell(x)=\sqrt{(x-4)^2+9}\geq 0$ ，因此 $y^2=(x-4)^2+9\quad\Rightarrow -\dfrac{(x-4)^2}{9}+\dfrac{y^2}{9}=1$



圖形是以 $(4,0)$ 為中心， $a=b=3$ 的上下雙之上支，

所求為 $\dfrac{x}{y}$ 的最大值，先找 (x,y) 到 $(0,0)$ 斜率最小值，

其最小值產生在「通過 $(0,0)$ 且與雙曲線相切時」

設切線 $L:y=kx$ 代入 $-\dfrac{(x-4)^2}{9}+\dfrac{y^2}{9}=1$

得 $(k^2-1)x^2+8x-25=0$ 。因為相切，所以 $D=0\quad\Rightarrow 8^2-4(k^2-1)(25)=0$ ，

得 $k=\pm\dfrac{3}{5}$ (負不合)。故所求 $=\dfrac{1}{k}=\dfrac{5}{3}$

6. (1)

	白白白	白白黃	白黃黃	黃黃黃
白白白	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$	0	0
白白黃	$\frac{3}{4}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{4}{12}$	0
白黃黃	0	$\frac{4}{12}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{3}{4}$
黃黃黃	0	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$

，

轉移矩陣 $A=\begin{bmatrix}\frac{1}{4}&\frac{1}{12}&0&0\\\frac{3}{4}&\frac{7}{12}&\frac{4}{12}&0\\0&\frac{4}{12}&\frac{7}{12}&\frac{3}{4}\\0&0&\frac{1}{12}&\frac{1}{4}\end{bmatrix}$，初始狀態 $X_0=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}$

$$X_1=AX_0=\begin{bmatrix}\frac{1}{4}&\frac{1}{12}&0&0\\\frac{3}{4}&\frac{7}{12}&\frac{4}{12}&0\\0&\frac{4}{12}&\frac{7}{12}&\frac{3}{4}\\0&0&\frac{1}{12}&\frac{1}{4}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{4}\\\frac{3}{4}\\0\\0\end{bmatrix},\quad X_2=AX_1=\begin{bmatrix}\frac{1}{4}&\frac{1}{12}&0&0\\\frac{3}{4}&\frac{7}{12}&\frac{4}{12}&0\\0&\frac{4}{12}&\frac{7}{12}&\frac{3}{4}\\0&0&\frac{1}{12}&\frac{1}{4}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{4}\\\frac{3}{4}\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{8}\\\frac{5}{8}\\\frac{2}{8}\\0\end{bmatrix}$$

$$X_3=AX_2=\begin{bmatrix}\frac{1}{4}&\frac{1}{12}&0&0\\\frac{3}{4}&\frac{7}{12}&\frac{4}{12}&0\\0&\frac{4}{12}&\frac{7}{12}&\frac{3}{4}\\0&0&\frac{1}{12}&\frac{1}{4}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{8}\\\frac{5}{8}\\\frac{2}{8}\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{4}{48}\\\frac{26}{48}\\\frac{17}{48}\\\frac{1}{48}\end{bmatrix},$$

則三局後的甲袋內三球顏色相同的機率為 $\frac{4}{48}+\frac{1}{48}=\frac{5}{48}$

(2)設穩定狀態為 $X=\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1-x-y-z \end{bmatrix}$，則 $AX=X$

得 $\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{12} & 0 & 0 \\ \frac{3}{4} & \frac{7}{12} & \frac{4}{12} & 0 \\ 0 & \frac{4}{12} & \frac{7}{12} & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1-x-y-z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1-x-y-z \end{bmatrix}$

$\Rightarrow\begin{cases} \frac{1}{4}x+\frac{1}{12}y=x \\ \frac{3}{4}x+\frac{7}{12}y+\frac{4}{12}z=y \\ \frac{4}{12}y+\frac{7}{12}z+\frac{3}{4}(1-x-y-z)=z \end{cases}$ $\Rightarrow\begin{cases} 9x-y=0 \\ 9x-5y+4z=0 \\ 9x+5y+14z=9 \end{cases}$，得 $\begin{cases} x=\frac{1}{20} \\ y=\frac{9}{20} \\ z=\frac{9}{20} \end{cases}$

所求 $=y=\frac{9}{20}$