國立基隆女中 113 學年第 2 次教師甄試 筆試試題 數學科

一、 填充題(每題 4 分，共 52 分，題號標示清楚且照順序填答，無須寫出計算過程)

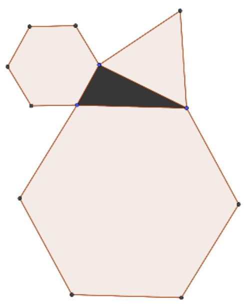
1. 設 $a_1,a_2,a_3,...,a_{113}$ 為一等差數列， $b_1,b_2,b_3,...,b_{113}$ 為一等比數列，若級數

$a_1+a_2+a_3+...+a_{113}=2024$ ， $b_1+b_2+b_3+...+b_{113}=113$ ，且兩數列滿足

$a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+...+a_{113}b_{113}=4000$ ，求 $a_1b_{113}+a_2b_{112}+a_3b_{111}+...+a_{113}b_1=$ ______

2. 求 $\sum_{k=1}^{900}\frac{1}{\sqrt{k}}$ 之整數部分為________

3. 如圖，在紙上任意做一個周長為 12 的三角形，再分別以各邊為邊長，向外做一個正三角形和兩個正六邊形，且這個三角形跟六邊形**不能重疊**。假設向外做出的正三角形邊長 x ，兩個正六邊形邊長為 y,z ，試求向外做出的正三角形和兩個正六邊形面積和有最小值時，此時 $x:y:z=$ ________



4. 袋中有大小相同的果凍 36 個，其中草莓、橘子、葡萄三種口味各 12 個。從中選取 20 個，若三種口味都至少拿到一個，則有幾種不同的取法________

5. 設 x,y 為實數，試求 $\sqrt{(x-3-2\sin y)^2+(x^2-2\cos y)^2}$ 的最小值________

6. 試求 $\sqrt[3]{6\sqrt{3}-10}-\sqrt[3]{6\sqrt{3}+10}$ 的值為________

7. 已知空間中兩點 $A(3,2,1),B(2,-1,5)$，若平面 $x-y-2z=5$ 上有一點 P，使得 $\overline{AP}^2+\overline{PB}^2$ 的值最小，則此 P 點的坐標為________

8. 已知 $-\dfrac{\pi}{4}\le\theta\le\dfrac{\pi}{4}$，且下列 x,y,z 的方程組

$$\begin{cases}\left(\sqrt{5}(\sin\theta-\cos\theta)\right)x+2y+z=0\\ 3x+y+2z=0\\ 21x+4y+\left(\sqrt{5}(\sin\theta-\cos\theta)+14\right)z=0\end{cases}$$ 有異於 $x=y=z=0$ 的解，

則此方程組之所有的解為________

9. 若 $(1+3x)^8=\sum_{k=0}^{8}a_kx^k$，則 $\sum_{k=2}^{8}ka_k=$________

10. 空間坐標中，滿足 $2\sqrt{3}\le x+2y-z\le 5\sqrt{3}$，$-2\sqrt{2}\le 4x-7y-5z\le 6\sqrt{2}$，

$-\sqrt{6}\le 2x-y+3z\le 7\sqrt{6}$ 的所有點 $(x\,,\,y\,,\,z)$ 所形成的立體圖形為 Ω，則 Ω 的體積為______

11. 兩實數數列 $\langle a_n\rangle$、$\langle b_n\rangle$，滿足：$a_n=n^3+n$，$b_n=3\times 2^{n-1}$，則 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\dfrac{a_k}{b_k}\right)=$__________

12. 袋中有大小材質均相同的十顆球，其球上編號分別為 $1,2,3,\cdots,10$，若隨機從袋中取出四個球，球號為 $x\,,\,y\,,\,z\,,\,w$，其中 $x<y<z<w$，且隨機變數 Y 的取值為 $10-y$，期望值為 $E(Y)$，則 $E(Y)=$__________

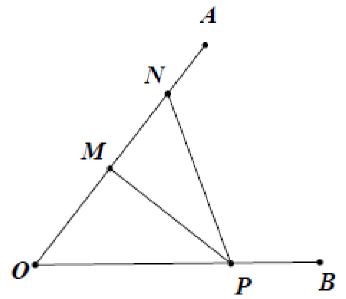
13. 設四邊形 $ABCD$ 四點共圓且直徑 $\overline{AC}$ 長為 4，若 $\overline{AB}-\overline{AD}=\sqrt{11}$，$\overline{CD}+\overline{BC}=\sqrt{13}$，

試求 $\overline{BD}=$__________

二、 計算證明題(每題 8 分，共 48 分，請詳列計算過程)

1. 證明：三角形 ABC，其內切圓切三邊於 D,E,F，則 $\dfrac{\triangle DEF\text{面積}}{\triangle ABC\text{面積}}=\dfrac{r}{2R}$

2. 如下圖，M、N 是銳角 $\angle AOB$ 的一邊上 $\overline{OA}$ 上的兩點，點 P 是 $\overline{OB}$ 邊上一動點，敘述並證明如何選取 P 點位置，可使 $\angle MPN$ 最大。



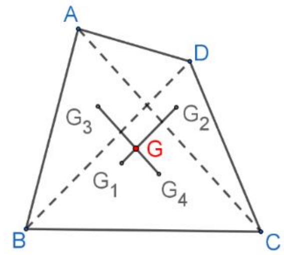
3. 將橢圓 $\Gamma_1:\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ 以原點 O 為中心，依逆時針方向旋轉銳角 θ 後，得到橢圓 Γ_2。已知橢圓 Γ_2 的長軸方程式為 $y=2x$，則橢圓 Γ_2 的方程式為？

(請化簡整理成一般式)

4. 已知「將四邊形切割為兩組三角形跟三角形（如右圖），若

G_1,G_2,G_3,G_4分別為$\Delta ABC,\Delta ADC,\Delta ABD,\Delta BCD$之重心，則$\overline{G_1G_2}$與

$\overline{G_3G_4}$之交點G即為此四邊形之重心」。



試證：

連接四邊形的對角線，將其切割為兩個三角形時，「四邊形的重心到此兩個三角形重心之距離比值」和「此兩個三角形面積比值的倒數」相等。

5. 身為一位高中數學老師，對於每道試題的見解要相對全面，同一道試題可以有不同的解題觀點，一題多解的奧妙是相當迷人的。對於下列試題，請根據不同的適合章節，可以如何解題，請至少舉出**四種**解法(含解出答案)，並說明是在哪個年級的哪個單元所觀念解題。

【請依據 108 課綱的課程安排，於每個年級都至少要提出一個單元解法。】

《試題》 以O表坐標平面的原點。給定一點$A(4,3)$，而點$B(x,0)$在正x軸上變動。若$\ell(x)$表$\overline{AB}$長，則 $\triangle OAB$中兩邊長比值$\dfrac{x}{\ell(x)}$的最大值為__________。

6. 有甲乙兩個袋子，甲袋內有3白球，乙袋內有3黃球，今從甲袋隨機取出一球放入乙袋，均勻混合後，再從乙袋隨機取出一球放入甲袋，如此稱為一局。

(1)若經過三局後，甲袋中的三球顏色均相同的機率為__________。(4 分)

(2)經過多局以後，甲袋有1白球2黃球的機率為__________。(4 分)