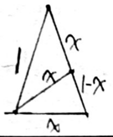
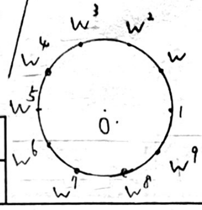
2024 6.10(一) ~ 6.13(四) Ru

3  $\frac{1}{x}=\frac{x}{1-x}$ $x^2+x-1=0 \Rightarrow \cos 72^\circ=\frac{-1+\sqrt5}{4}$ $\cos^2 36^\circ=\frac{1+\frac{-1+\sqrt5}{4}}{2}=\frac{6+2\sqrt5}{16}=\left(\frac{1+\sqrt5}{4}\right)^2$



令 $\theta=\frac{2\pi}{10}$，$1+w+\cdots+w^9=0$

$(\overrightarrow{A_1O}+\overrightarrow{OA_i})\cdot(\overrightarrow{A_1O}+\overrightarrow{OA_{i+1}})$

$\Rightarrow \sum_{i=2}^{9}\left(1-\cos(i\theta)-\cos((i-1)\theta)+\cos\theta\right)$

$=8+Re(1+w)+Re(1+w^9)+8\cos\theta$

$=10+10\cdot\frac{1+\sqrt5}{4}=\frac{25+5\sqrt5}{2}$

新北市立板橋高級中學 113 學年度
第二次教師甄選【數學科】試題卷

一、填充題(每題 5 分，12 題，共 60 分)

1 $4\underline{)2032}$ $4\underline{)508}$ 127 $\sqrt{2032}=4\sqrt{127}$，$4=1+3=2+2=3+1$

1. 設a,b為正整數，且$\sqrt a+\sqrt b=\sqrt{2032}$，則$(a,b)$有 3 組正整數解。

2 $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{-25}=1 \to$ 切線：$y=x\pm\sqrt{100+(-25)} \Rightarrow x-2y=\pm5\sqrt3$，但 $\begin{cases}x+2y>0\\x-2y>0\end{cases} \Rightarrow \min=5\sqrt3$

2. 設$\log(x+2y)+\log(x-2y)=2$，則$x-y$的最小值為 $\boxed{5\sqrt3}$

3. 半徑為 1 的圓上有 10 個等分點 A_1、A_2、…、A_{10}，則$\sum_{i=2}^{9}(\overrightarrow{A_1A_i}\cdot\overrightarrow{A_1A_{i+1}})=$ $\frac{25+5\sqrt5}{2}$

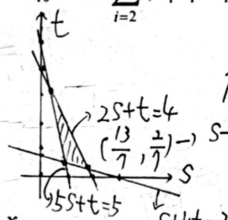
4 $2^{2k+1}\equiv 2 \pmod 6$　$k\in\mathbb N$
$2^{2k}\equiv 4 \pmod 6$
$\frac{1}{\sin\frac{2}{3}\pi}+\frac{1}{\sin\frac{4}{3}\pi}=0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{8}(\ )=0$

n		
9	$\frac{1}{\sin\frac{1}{3}\pi}$	$=\frac{2}{\sqrt3}$
10	$\frac{1}{\sin\frac{2}{3}\pi}$	$=\frac{2}{\sqrt3}$
11	$\frac{1}{\sin\frac{\pi}{6}}$	$=2$

$\to$ 和 >4

4. $\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{\sin\frac{1024\pi}{2^n\times3}}>4$，則正整數 m 的最小值為 11

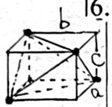
5 令 $\log x=s$，$\log y=t$



$2s+t=4$，$\left(\frac{13}{7},\frac{2}{7}\right)$，$5s+t=5$，$s+4t=3$，$s-t=\frac{11}{7}$，$10^{\frac{11}{7}}$

5. 已知x和y均為正數，且$\begin{cases}x^2y\le10000\\xy^4\ge1000\\x^5y\ge100000\end{cases}$，則$\frac{x}{y}$的最大值為 $10^{\frac{11}{7}}$

6 令 $A=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$，$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{bmatrix}d&-b\\-c&a\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a&c\\b&d\end{bmatrix}$
$\Rightarrow d=|A|a=|A|^2d$
$\Rightarrow |A|=1 \Rightarrow a=d$，$c=-b$
$\Rightarrow A=\begin{bmatrix}a&b\\-b&a\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix}3a+4b=4\\4a-3b=3\end{matrix} \Rightarrow a=\frac{24}{25}$，$b=\frac{7}{25}$

11 法2 

6. 設 A 為二階方陣，I 為二階單位方陣，A^T 為 A 的轉置矩陣。已知$A^TA=AA^T=I$且$\det A>0$，$A\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix}$，則矩陣 A 可將直線$x+y=7$對應到的圖形方程式為 $31x+17y=175$。

$\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=A\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\frac{1}{25}\begin{bmatrix}24&-7\\7&24\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\frac{1}{25}\begin{bmatrix}24x'-7y'\\7x'+24y'\end{bmatrix}$　$x+y=7 \Rightarrow 31x'+17y'=175$

$a^2+b^2=34$，$b^2+c^2=29$，$c^2+a^2=13$，$4R^2=(2R)^2=a^2+b^2+c^2=38 \Rightarrow 4\pi R^2=38\pi$

7. 在空間坐標系中，已知$\overline{AB}$的中點為(2,3,4)，且$\overline{AB}=10$，若動點 P 滿足$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=1$，且 P 點到直線$L:\frac{x-8}{2}=\frac{y-9}{1}=\frac{z-10}{-2}$的最短距離為 $2\sqrt{26}$

7 $(\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{MA})\cdot(\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{MB})=\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PM}+0-25=1 \Rightarrow |\overrightarrow{PM}|=\sqrt{26}$

設 $Q(2t+8,t+9,-2t+10)$，$\overrightarrow{MQ}\cdot\overrightarrow{L}=(2t+6,t+6,-2t+6)\cdot(2,1,-2)=9t+6=0 \Rightarrow t=\frac{-2}{3}$ $\Rightarrow |\overrightarrow{MQ}|=\left|\left(\frac{14}{3},\frac{16}{3},\frac{22}{3}\right)\right|=\frac{2}{3}\cdot3\sqrt{26}=2\sqrt{26}$

min $\sqrt{26}$ M

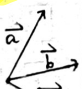
8. 袋中有 3 顆黑球、5 顆白球和 7 顆紅球，一次取一球，每球被取中的機會均等，取後不放回，若紅球最先被取完的條件下，黑球最後被取完的機率為 $\frac{5}{11}$

8 $\frac{P(RWB)}{P(RWB)+P(RBW)}=\frac{\frac{3}{15}\times\frac{5}{12}}{\frac{3}{15}\times\frac{5}{12}+\frac{5}{15}\times\frac{3}{10}}=\frac{5}{3\times2+5}=\frac{5}{11}$

9 $|z^2+z+2|=\left|\left(z-\frac{-1+\sqrt7 i}{2}\right)\left(z-\frac{-1-\sqrt7 i}{2}\right)\right|=2$
圖形對稱於 $a=-\frac12$
$\Rightarrow |a+bi-\alpha||a+bi-\beta|=2$ → 紐結 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=$定值
$\Rightarrow ((a-\alpha)^2+b^2)((a-\beta)^2+b^2)=4$

9. 複數$z=a+bi$，其中$a,b\in\mathbb R$，滿足$|z^2+z+2|=2$，求 b 的最大值為 $\frac{\sqrt{15}}{2}$

$\alpha+\beta=-1$，$\alpha\beta=2$，$\alpha^2+\beta^2=-3$
$\Rightarrow (a^2+b^2-2a\alpha+\alpha^2)(a^2+b^2-2a\beta+\beta^2)=4$
$\Rightarrow (a^2+b^2)^2+(2a-3)(a^2+b^2)+8a^2+4a+4=4$
$a=-\frac12$ 代入 $(a^2+b^2)^2-4(a^2+b^2)=0 \Rightarrow a^2+b^2=4$ or 0
$a=-\frac12 \Rightarrow b=\pm\frac{\sqrt{15}}{2}$

11 法: 

10. 方程式$x=\sqrt{x^2-\frac1x}+\sqrt{1-\frac1x}$的解為$x=$ $\frac{1+\sqrt2}{2}$

10 $\sqrt{x^2-\frac1x}+\sqrt{1-\frac1x}=x$ ①
設 $\sqrt{x^2-\frac1x}-\sqrt{1-\frac1x}=k=x-\frac1x$ ②
①·② $\Rightarrow x^2-1=kx \Rightarrow k=x-\frac1x$
①−② $\Rightarrow 2\sqrt{1-\frac1x}=\frac1x \Rightarrow 4x^2-4x-1=0 \Rightarrow x=\frac{1+\sqrt2}{2}$ or $\frac{1-\sqrt2}{2}<0$ (不合)

11. 在四面體$ABCD$中，$\overline{AB}=\overline{CD}=\sqrt{34}$，$\overline{AC}=\overline{BD}=\sqrt{29}$，$\overline{AD}=\overline{BC}=\sqrt{13}$，則$ABCD$的外接球表面積為 38π

$\begin{vmatrix}\vec a\\\vec b\\\vec c\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\vec a\\\vec b\\\vec c\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\vec a\\\vec b\\\vec c\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\vec a^t&\vec b^t&\vec c^t\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\vec a\cdot\vec a&\vec a\cdot\vec b&\vec a\cdot\vec c\\\vec b\cdot\vec a&\vec b\cdot\vec b&\vec b\cdot\vec c\\\vec c\cdot\vec a&\vec c\cdot\vec b&\vec c\cdot\vec c\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}34&25&9\\25&29&4\\9&4&13\end{vmatrix}=3600=60^2$

$\cos A=\frac{25}{\sqrt{34}\sqrt{29}}$　$\Rightarrow \Delta=\frac{19}{2}$　$V=\frac{60}{6}=10=\frac13\cdot\frac{19}{2}\cdot h\cdot4$，$h=\frac{15}{19}$
$\frac{\sqrt{13}\cdot\sqrt{34}\cdot\sqrt{29}}{19\times2}=r$
$R^2=h^2+r^2=\frac{19}{2}$　$4\pi R^2=38\pi$

12. 設 A 是由任意 50 個相異正整數組成的合。令$B=\left\{\frac ab \,\middle|\, a,b\in A且a\ne b\right\}$。$|B|$表示集合 B 中的元素個數，則$|B|$的最大值與最小值分別為 M,m，則 $M+m=$ 2548

12 取 50 個相異質數：$M=50\times49=2450$
取 $1,p^1\cdots,p^{49}$：可能的值 $p^1,\cdots p^{49}$，$\frac1{p^1},\cdots\frac1{p^{49}} \Rightarrow m=49\times2 \Rightarrow M+m=2548$
(p 為質數)

9 另解
$z^2+z+2=\left(z+\frac12\right)^2+\frac74$
令 $w=\left(z+\frac12\right)^2$
$\Rightarrow \left|w+\frac74\right|=2$
$\Rightarrow \left(z+\frac12\right)^2=w=-\frac74+2e^{i\alpha}$
$\Rightarrow z=-\frac12+\left(-\frac74+2e^{i\alpha}\right)^{\frac12}$
$\Rightarrow b=Im(z)\le\left|-\frac74-2\right|=\frac{\sqrt{15}}{2}$