113松山高中第二次

一、填充題（每題5分，共50分）

1. 一數列 $\langle a_n \rangle$ 中，$a_1=3$，且滿足 $a_{n+1}=4+a_n+\sqrt{1+16a_n}$，求數列一般項 $a_n=$?

2. 若 $f(x)$ 在 $x\in(0,\infty)$ 為嚴格遞增函數，若 $x>0$，滿足 $f(x)\cdot f\left(\frac{1}{x}+f(x)\right)=1$，求 $f(1)=$?

3. 若 $A=[a_{ij}]_{2\times2}$，$B=[b_{ij}]_{2\times2}$，且 A,B 的元都由 0 和 1 組成，求 AB 有幾種可能？

4. 袋中有5紅球3白球，一次取3球，求取紅球個數的期望值？

5. 已知四邊形 $ABCD$，$\angle ABC=\angle CAD=60^\circ$，$\angle BAC=45^\circ$，$\angle ADC=90^\circ$，且 $\overline{BC}=2\sqrt{2}$，求 $\overline{BD}^2=$?

6. 已知 $\frac{z+1}{z-1}$ 為純虛數，求 $|3z^2-z+1|$ 最小值=?

7. 已知一三角錐 $A-BCD$，其中 $\overline{BC}=\overline{CD}=\overline{BD}$，$\overline{AB}=\overline{AC}=\overline{AD}$，且 $\triangle ABC$ 之重心為 G，又 $\overline{DG}=1$，求 $A-BCD$ 的體積最大值為？

8. 有一橢圓 $\Gamma_1: \frac{x^2}{m}+\frac{y^2}{n}=1$，及雙曲線 $\Gamma_2: \frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=1$ 共焦點，其焦點為 $(-2,0)$ 及 $(2,0)$，且 Γ_1 的短軸長與 Γ_2 的貫軸長相等，求 $\begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix}=$?

9. 求 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\sqrt{1-\left(\frac{k}{n}\right)^2}=?$

10. 求 $y=\sin x$ 與 $x=\frac{\pi}{4}$, $x=\frac{3\pi}{4}$ 所圍區域繞 x 軸旋轉之旋轉體體積?

二、計算題(每題10分,共30分)

1. 已知 $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$,請用高中課程內容

說明:

(1) $f(x)$ 在 $x=0$ 可微分.

(2) $f(x)$ 在 $x=0$ 的導數,即 $f'(0)=?$

2. 有一拋物線 $\Gamma: y^2=4x$,焦點為 F,通過焦點的一直線交 Γ 於 A, B 兩點,且 $\overline{AF}>\overline{BF}$. 若 F 對於原點的對稱點為 M,且 $\overline{AB}\perp\overline{BM}$

(1) 求 $\overline{AF}-\overline{BF}=?$

(2) 若 A 對 x 軸作垂線之垂足為 Q,試證:$\overline{AQ}\perp\overline{QB}$.

不太確定,有點忘了😅

3、已知$\triangle ABC$中，$\overline{BC}=a$，$\overline{AC}=b$，$\overline{AB}=c$，$\triangle ABC$的內切圓分別交$\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{AC}$於D, E, F三點，若令$\overline{AD}=x$，$\overline{BE}=y$，$\overline{CF}=z$.

(1) 試證明：$x=\frac{b+c-a}{2}$，$y=\frac{a+c-b}{2}$，$z=\frac{a+b-c}{2}$

(2) 證明：$abc \geq (b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)$，並說明等號成立時，$\triangle ABC$為正三角形.

三、證明題 (每題10分，共20分)

1. 若f(x)在包含a的開區間有定義，

(1) 證明若f(x)在$x=a$可微分，則f(x)在$x=a$必連續

(2) 給出一個函數g，使得其在$x=0$處連續，但在$x=0$不可微分，並驗證之。

2. A, B皆為n階方陣，若$(A+B)$為可逆方陣，證明：$A(A+B)^{-1}B = B(A+B)^{-1}A$