

國立竹東高級中學 113 學年度第一次教師甄試數學科試卷(共 2 頁)

一、填充題(每題 7 分,共 56 分)

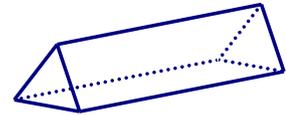
1. 若 $x^2 - 3x + 1 = 0$ ，求 $x^7 + \frac{1}{x^7} =$ _____。

2. 設 k 為固定的實數。已知 $x + \sqrt{k - x^2}$ 的最大值為 $2\sqrt{13}$ ，求 $x + \sqrt{k - x^2}$ 的最小值 = _____。

3. 在直角坐標空間中，若三個平面

$$E_1: x - 2y + z = 0, E_2: x + y - 2z = 0, E_3: 2x - y - z = 12$$
 及兩個平行的平面

$$F_1: x + y + z = 0, F_2: x + y + z = k$$
 圍出一個體積為 30 的三角柱(如圖所示)，求 $k =$ _____。



4. 在直角坐標平面上，圓 $x^2 + y^2 = 1$ 被 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 變換為曲線 Γ ，求 Γ 的方程式為_____。

5. 設 $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \cdot \frac{2k-1}{\sqrt{n^2 + (2k-1)^2}}$ ，求 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n =$ _____。

6. 連續投擲一個公正的骰子 10 次，求 10 次中，正面曾連續出現兩次或兩次以上的機率為_____。

7. 若實數 a, b, c 滿足 $\frac{a}{3} + \frac{b}{4} + \frac{c}{6} = \frac{a}{4} + \frac{b}{5} + \frac{c}{7} = \frac{a}{6} + \frac{b}{7} + \frac{c}{9} = 1$ ，則 $a + b + c =$ _____。

8. 設 $a_1 = 7$ ，且對於大於 1 的正整數 n ，皆滿足 $a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}$ ，求無窮級數和 $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} + \cdots =$ _____。

二、計算證明題(共 44 分)

1. 設正整數 $n \geq 3$ 。化簡 $\sum_{k=3}^n C_k^n \cdot C_3^k$ 。 (10 分)

2. 在直角坐標空間中，設曲線 $\Gamma_n: y = \sqrt{(1-x^2)^n}$ (而且 $z = 0$) 是 xy 平面上的曲線，其中 n 為正整數。將 Γ_n 和 x 軸在 xy 平面上所圍出的區域繞 x 軸旋轉，得到空間中一個立體，令其體積為 V_n 。

(1) 求 V_3 。 (5 分)

(2) 試證： $\frac{V_{n+1}}{V_n} = \frac{2n+2}{2n+3}$ 。 (9 分)

3. 設 $x \in \mathbb{R}$ ，且 $y = \frac{4-3\sin x}{2+\cos x}$ ，試求 y 值的範圍。(10 分)

4. \overline{AB} 為圓 $x^2 + y^2 = 37$ 上的一弦，若點 $P(1,2)$ 在 \overline{AB} 上，且剛好為 \overline{AB} 的其中一個三等分點，試求直線 AB 的方程式。(10 分)

解答

一、填充題

1. 843

2. $-\sqrt{26}$

3. $\pm\frac{15}{4}$

4. $(y-3x)^2 + x^2 = 1$ (即 $10x^2 - 6xy + y^2 = 1$)

5. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

6.此題不計分

7.17

8. $\frac{3}{7}$