2024.5.30(四)～6.2(日)

Ru

國立臺灣師範大學附屬高級中學 113 學年度第 2 次專任教師甄選數學科筆試〔題目卷〕

一、 選填題：(每題 5 分，共 90 分。填在答案卡上，<u>分數或根式須以最簡形式回答</u>，否則不予計分)

A. <u>藍天高中</u>某班有 25 位學生(座號 1 到 25)，某節數學課，由座號 1 號的同學先在黑板寫一個正整數，其他同學再依座號順序陸續在黑板寫另一個正整數，進而形成一數列，且有以下規定：($k\in\mathbb{N}$)

(1) 座號為 $3k+1$ 者，寫出的數字必須比前一個同學減少 1；

(2) 座號為 $3k-1$ 者，寫出的數字必須比前一個同學增加 2；

(3) 座號為 $3k$ 者，寫出的數字必須比前一個同學增加 3。

例如：若 1 號同學寫出 4，則所得的數列為 $4,6,9,8,10,13,12,\cdots$。

若規定全班寫出的 25 個數的總和不超過 2024，則 1 號同學能寫出的正整數之最大值為 <u>①②</u>

64

1. □
2. □+2
3. □+5
4. □+4
5. □+6
6. □+9
7. □+8

⋮

$\Rightarrow a_1 = 11$

$n = \frac{24}{3} = 8$

$d = 4\cdot 3 = 12$

$25\square + \frac{(2\cdot 11 + 7\cdot 12)\cdot 8}{2} \le 2024$

$53\cdot 8 = 424$

$\Rightarrow \square \le \frac{1600}{25}\cdot\frac{4}{4} = 64$

B. 若多項式函數 $f(x)$、$g(x)$、$h(x)$ 滿足以下條件：

$\frac{7}{3}$

(1) $f(x)$ 為二次函數，且 $f(1)$ 為其最小的函數值，並有 $f(2)=5$。

(2) $g(x)$ 為一次函數，其圖形斜率為 -2，且 $y=g(x)$ 的圖形通過 $y=f(x)$ 圖形的頂點。

(3) $h(x)=f(x)\cdot g(x)$ 且 $y=h(x)$ 圖形的廣域(大域)特徵與 $y=px^3$ 的廣域(大域)特徵相同，其中 $|p|=6$。

$\boxed{B}$

根據上述條件，求 $y=h(x-1)$ 圖形的對稱中心之 x 坐標為 $\frac{③}{④}$。

設 $V(1,k)$

$f(x) = a(x-1)^2+k = 3(x-1)^2+2$

$g(x) = -2x+k+2 = -2x+4$

$-2a=-6 \Rightarrow a=3$

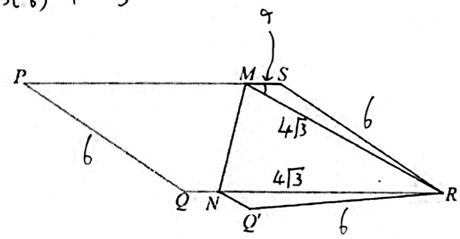
$h(x) = (3x^2-6x+5)(-2x+4)$

$= -6x^3+24x^2-34x+20$

$\Rightarrow -\frac{24}{3(-6)}+1 = \frac{7}{3}$

C. 如右圖，平面上有一個平行四邊形 $PQRS$，沿著線段 $\overline{MN}$ 將平行四邊形對摺，恰好可讓 P 點與 R 點重合，且讓 Q 點坐落於 Q' 的位置，而 M、N 分別在 $\overline{PS}$、$\overline{QR}$ 上。若 $\overline{PQ}=6$、$\overline{PM}=4\sqrt{3}$、$\cos Q=-\frac{\sqrt{11}}{4}$，

$2\sqrt{3}$

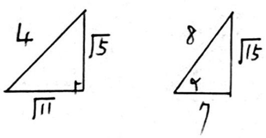


$\boxed{C}$

則摺痕長 $\overline{MN}=$ <u>⑤√⑥</u>。

$\frac{4\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{5}}{4}} = \frac{6}{\sin\alpha} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{\sqrt{15}}{8}$

$\triangle MSR \cong \triangle NQ'R$ (ASA)

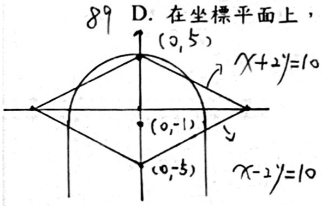


$\angle RMN = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$

$\cos(90^\circ - \frac{\alpha}{2}) = \sin\frac{\alpha}{2}$

$\overline{MN} = 4\sqrt{3}\sqrt{\frac{1-\frac{7}{8}}{2}}\cdot 2 = 2\sqrt{3}$

89 D. 在坐標平面上，滿足聯立不等式 $\begin{cases} y\le -1+\sqrt{36-x^2} \\ |x|+2|y|\le 10 \end{cases}$ 的解區域中，其 x、y 坐標均為整數的點共有 <u>⑦⑧</u> 個。



$y\ge 0$ $\begin{cases} x\le -2y+10 \\ x^2\le 36-(y+1)^2 \end{cases}$

$y\le -1$ $\begin{cases} x\le 2y+10 \\ x^2\le 36 \end{cases}$

y		$x\ge 2$	個數
5		0	1
4	$x\le 2$, $x^2\le 11$	0, 1, 2	5
3	$x\le 4$, $x^2\le 20$	0, 1, 2, 3, 4	9
2	$x\le 6$, $x^2\le 27$	0, 1, 2, 3, 4, 5	11
1	$x\le 8$, $x^2\le 32$	0, 1 ~ 5	11
0	$x^2\le 35$	0, 1 ~ 5	11

y		$x\ge 0$	個數
−1	$x\le 8$, $x^2\le 36$	0, 1~6	13
−2	$x\le 6$, $x^2\le 36$	0, 1~6	13
−3	$x\le 4$, $x^2\le 36$	0, 1~4	9
−4	$x\le 2$, $x^2\le 36$	0, 1, 2	5
−5		0	1

$48+41=89$

設 $Q(x)=2(x-\alpha)(x-\beta)$

E. 已知$Q(x)$是一個最高次項係數為2的實係數多項式，滿足$\deg Q(x)=2$。若方程式$Q(x^2+8x-17)=0$有一個根為2且至少有一個重根，則多項式$Q(2x^2-5x+9)$除以$2x-1$的餘式中，所有不同的可能值之和為⑨⑩⑪。

352

$\boxed{\text{目}}$ $Q(x^2+8x-17)=2(x^2+8x-17-\alpha)(x^2+8x-17-\beta)$

$=2(x-2)(x+10)(x-2)(x+10)=2(x^2+8x-20)^2 \Rightarrow \alpha=\beta=3$

or

$=2(x-2)(x+10)(x+4)(x+4)=2(x^2+8x-20)(x^2+8x+16) \Rightarrow \alpha=3,\ \beta=-33$

$Q(7)=2\cdot16=32 \rightarrow$ 和$=352$

or $2\cdot(4)\cdot(40)=320$

F. 將編號為1、2、…、8的八個號碼球隨機放置在某圓周給定的八個等分點上，使每個等分點上恰一個球。設「圓周上所有相鄰兩球號碼之差的絕對值」之和為S，則S的最小值為⑫⑬。

14

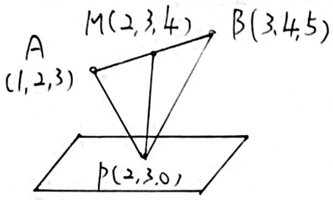
亂湊：

2 3 4

1 5 $\Rightarrow 14$

8 7 6

38 G. 空間直角坐標系中有兩點$A(1,2,3)$與$B(3,4,5)$，若在xy平面上有一動點P，則$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2$的最小值為⑭⑮。



$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2=2(\overline{AM}^2+\overline{MP}^2)$

$\geq 2(1+1+1+4^2)=38$

H. 一村莊的村民們將財物全放在教堂的一個箱子裡並鎖上，箱子上有36個鎖，任兩個鎖對應到的鑰匙不相同，現將鑰匙複製若干支分給村民，滿足每個村民擁有的鑰匙種類一樣多，且任意三個人可以打開箱子，但是任意兩個人無法打開箱子，則求此村莊的村民最多有⑯人。

9

新奧數教程 (高三)

共11人 6人打開 5人打不開

11人中,每5人聚在一起,就有一ㄅ打不開的鎖

①最少____ㄅ鎖 (C^{11}_5)

②每ㄅ鎖配____ㄅkey $(C^{10}_5\cdot11/C^{11}_5)$

11人中的某人必能打開剩餘10人中任選5人所不能開的鎖

③每人配____ㄅkey (C^{10}_5) ④共____ㄅkey $(C^{10}_5\cdot11)$

$\boxed{\text{H}}$ $C^n_2=36 \Rightarrow n=9$

299 I. 空間中12個相異平面最多可將此空間分割成⑰⑱⑲個區域。

一維：直線上nㄅ点,最多將此直線分割成 $\underline{1+n}$ ㄅ区域

二維：1(初始)+直線数+交点数$=1+C^n_1+C^n_2$

三維：1(初始)+平面数+交線数+交点数$=1+C^n_1+C^n_2+C^n_3$ $\Rightarrow 1+C^{12}_1+C^{12}_2+C^{12}_3=299$

J. 計算$\frac{1}{2^{16}}(1\times2C_1^{16}+2\times3C_2^{16}+3\times4C_3^{16}+\cdots+16\times17C_{16}^{16})=$ ⑳㉑。

76

令 $f(x)=x(1+x)^{16}=\sum_{k=0}^{16}C^{16}_k x^{k+1}$

$f'(x)=(1+x)^{16}+16\cdot x(1+x)^{15}=\sum_{k=0}^{16}C^{16}_k(k+1)x^k$

$f''(x)=16(1+x)^{15}+16((1+x)^{15}+15x(1+x)^{14})=\sum_{k=0}^{16}(k+1)k\,x^{k-1}$

$f''(1)=16\cdot2^{15}+16\cdot2^{15}+4\cdot4\cdot15\cdot2^{14}$

$=16\cdot2^{16}+60\cdot2^{16}$

$=76\cdot2^{16} \Rightarrow 76$