

桃園市立高級中等學校113學年度教師聯合

甄選筆試試題

科目：數學科

說明：本試卷共分填充題、計算題與證明題三部份。

第壹部份：填充題占40%；第貳部份：計算題占30%；第參部份：證明題占30%。

請使用藍色或黑色原子筆或鋼筆書寫填答於「答案本」上，依題號作答，修正時應使用修正液(帶)；答案本因考生書寫不清、污損等人為因素導致無法批改，由考生自行負責不得有異議；於試題卷上作答者，不予計分。

本試題卷連同答案本一併交回，違規攜出試場者以零分計算。

第壹部份：填充題（共5題，占40分）

1. 從 $\sin \frac{2\pi}{7}$, $\sin \frac{4\pi}{7}$, $\sin \frac{6\pi}{7}$, $\sin \frac{8\pi}{7}$, $\sin \frac{10\pi}{7}$, $\sin \frac{12\pi}{7}$ 中任選四項相乘，試求所有這些乘積的總和。(8分)

2. 已知空間中一點 $P(7,1,\sqrt{15})$ ，點 Q 為 x 軸上一動點，點 R 為 y 軸上一動點，試求三角形 PQR 周長的最小值。(8分)

3. 試求 $(C_2^2 + C_2^3x + C_2^4x^2 + C_2^5x^3 + C_2^6x^4 + C_2^7x^5)^4$ 展開式中 x^5 的係數。(8分)

4. 在 4×4 的方格中隨機挑選8格，令隨機變數 X 為被挑選格子所佔滿的直行與橫列總數。試求 X 的期望值。(8分)

桃園

5. 某店家舉辦飲料促銷，憑4個空瓶可免費兌換1瓶飲料。若在促銷期限內想喝到至少100瓶飲料，試求需購買飲料的最少瓶數。(8分)

第貳部份：計算題（共3題，占30分）

6. 求下列數列的極限：

(1) $a_n = \left(\frac{3n+1}{3n-1}\right)^n$ (5分)

(2) $a_1 = -6$ ， $a_{n+1} = \sqrt{6+a_n}$ (5分)

7. 求 $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^4}} dx$ 。(10分)

桃園

8. 求函數的極值(需完整的計算過程)：

求 $f(x, y) = 2x^2 - 4x + y^2 - 4y + 1$ ，由 $x=0$ ， $y=2$ ， $y=2x$ 在第一象限所圍區域的絕對極值。(10分)

第參部份：證明題（共 3 題，占 30 分）

9. 證明下列級數收斂或發散

(1) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n} \ln n}$ (5 分)

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{(2n+5)^n}$ (5 分)

10. 證明或反證：

若向量 $v_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$, $i = 1, 2, \dots, n, n \geq 3$, 則行列式

$$|v_1 v_2 \cdots v_n| = |v_n v_1 v_2 \cdots v_{n-1}| = \cdots = |v_2 v_3 \cdots v_n v_1|. \quad (10 \text{ 分})$$

11. 小明在8週的假期中，每天至少吃1片餅乾，但每週吃不超過13片餅乾。試證明必有連續若干天中，小明恰吃了7片餅乾。(10分)