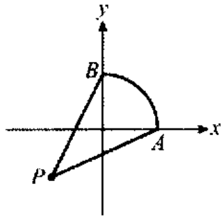
TRML 團體賽-2023

1. 坐標平面上的二階方陣 A 所代表的線性變換把兩點 $(1,2)$、$(2,3)$ 分別變換爲 $(2,3)$ 及 $(4,5)$。若將點 $P(112,-2023)$ 用方陣 A 連續進行多次變換，則點 P 首次變到第一象限所需的變換次數為 ______ 次。

2. 設空間中的四點 $A(1,1,1)$、$B(3,3,2)$、$C(6,5,4)$、$D(-11,13,-5)$，則 D 點到平面 ABC 的距離為 ______ 。

3. 由 0 與 1 組成的 12 位數的正整數中，11 的倍數有 ______ 個。

4. 如圖，PAB 是以 P 為圓心的扇形，點 A,B 分別在 x 軸、y 軸上。若 $\overline{AP}$ 與 $\overline{BP}$ 的中點分別在 y 軸、x 軸上，則 $\tan\angle APB=$ ______ 。



5. 直線方程式 $ax+by=0$，其中 $a,b\in\{0,1,2,3,4,5,6,7\}$ 且 a,b 不同時為 0，則這樣的方程式能表示 ______ 條不同的直線。

6. 考慮如下的上三角型式的 10 元一次聯立方程式，其中對所有的 $i=1,2,3,\cdots,10$，$a_{i,i}\neq 0$：

$$\begin{aligned}
a_{1,1}x_1+a_{1,2}x_2+a_{1,3}x_3+\cdots+a_{1,10}x_{10}&=b_1，\\
a_{2,2}x_2+a_{2,3}x_3+\cdots+a_{2,10}x_{10}&=b_2，\\
a_{3,3}x_3+\cdots+a_{3,10}x_{10}&=b_3，\\
&\vdots\\
a_{10,10}x_{10}&=b_{10}。
\end{aligned}$$

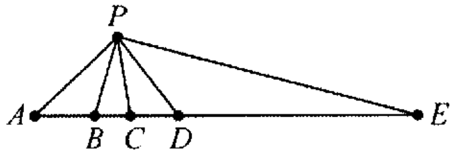
高斯消去法的演算如下所示：首先 $x_{10}=\dfrac{b_{10}}{a_{10,10}}$，接著依照 $i=9,8,\cdots,1$ 的次序計算

$x_i=\dfrac{b_i-\left(a_{i,i+1}x_{i+1}+a_{i,i-2}x_{i+2}+\cdots+a_{i,10}x_{10}\right)}{a_{i,i}}$，則求 $x_{10},x_9,x_8,\cdots,x_1$ 的演算過程中共用了 ______ 次乘法與除法。

7. 若 a,b,c,d 四數滿足任意三數的乘積與另一數之和都等於 $\dfrac{5}{2}$，且 $abcd=1$，則滿足這些條件的四元組 (a,b,c,d) 共有 ______ 組。

8. 在坐標空間中，某球面 S 分別與兩平行平面 $E_1: x+2y-2z=46$，$E_2: x+2y-2z=1$ 相交於圓 O_1 及圓 O_2，且 S 的球心 O 在兩平面 E_1 及 E_2 之間。若圓 O_1 的面積比圓 O_2 的面積多 165π，則球心到兩平面 E_1 及 E_2 的距離之差為 ______ 。

9. 如圖，A,B,C,D,E 依序在直線 L 上，且 $\overline{AB}=5$，$\overline{BC}=3$，$\overline{CD}=4$。若 P 為直線 L 外一點使得 $\angle APB=\angle BPC=\angle CPD=\angle DPE$，則 $\overline{DE}=$ ______ 。



10. 在 $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{99}$ 中任選奇數個數相乘，若所有這些乘積的總和為 S，則最接近 S 的整數為 ______ 。

2023 TRML 思考賽

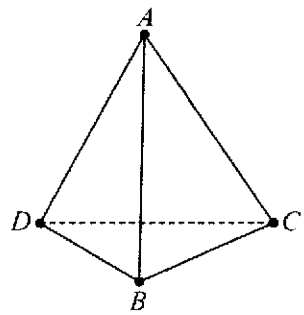
思考賽共 10 題，每題均為 6 分。答題時必須寫明計算或證明過程，為得到滿分，答題方式必須合理，層次清楚簡明。前面小題縱使未被證出，也可被引用來解後面小題；但後面小題的結果，未正確證明之前，不可用來解前面小題。繳交的答案紙每張至多一小題，且必須在每張答案紙上方標明題號且依序排列。每張紙上只寫一面，不要寫兩面。准考編號已由大會直接印於答案紙上，在繳交的答案卷上，不可用其他方式表明隊伍的身份。

下列三個性質可逕行利用，不必證明：

(甲) 三角形面積$=\dfrac{1}{2}\times$底邊長$\times$高，

(乙) 四面體體積$=\dfrac{1}{3}\times$底面積$\times$高，

(丙) 在平面上，各邊長都是 1 的n邊形中，面積以正n邊形為最大。



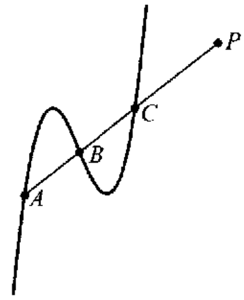
請利用上面的性質，回答下面有關空間中六條邊滿足某些條件的四面體$A-BCD$的體積和表面積的極值問題。**除了寫出答案的數值之外，也必須提供計算過程以及相關說明。**

1. 六邊邊長皆為 1 的正四面體$A-BCD$，表面積是多少？
2. 六邊邊長皆為 1 的正四面體$A-BCD$，體積是多少？
3. 除了$\overline{AD}$以外的五邊邊長皆為 1 的四面體$A-BCD$，體積最大是多少？
4. 除了$\overline{AD}$以外的五邊邊長皆為 1 的四面體$A-BCD$，表面積最大是多少？
5. 除了$\overline{AB}$和$\overline{AC}$以外的四邊邊長皆為 1 的四面體$A-BCD$，體積最大是多少？
6. 若邊長皆為 1 的正五邊形$UVWXY$的面積是$\dfrac{5}{4}\tan x^{\circ}$，其中$0<x<90$，則$x$之值是多少？
7. 除了$\overline{AB}$和$\overline{AC}$以外的四邊邊長皆為 1 的四面體$A-BCD$，表面積最大是多少？
8. 除了$\overline{AD}$和$\overline{BC}$以外的四邊邊長皆為 1 的四面體$A-BCD$，體積最大是多少？
9. 除了$\overline{AD}$和$\overline{BC}$以外的四邊邊長皆為 1 的四面體$A-BCD$，表面積最大是多少？
10. 已知$\overline{AB}=\overline{AC}=\overline{AD}=1$或$\overline{AB}=\overline{AC}=\overline{CD}=1$的四面體$A-BCD$，體積最大是多少？

TRML 個人賽-2023 第一回

I-1. 小於 100 的奇數 1, 3, 5, ..., 99 中，所有為 3 倍數的數之總和為 _____ 。

I-2. 若實係數多項式 $3x^3-2x^2-ax-42=0$ 有兩個根之和為 1，則 $a=$ _____ 。



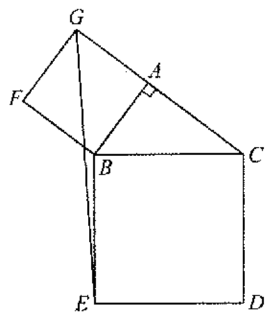
I-3. 如圖，坐標平面有一條通過點 $P(7,5)$ 的直線 L 與曲線

Γ：$y=x^3-6x^2+9x-2$ 相交於 A,B 與 C 三相異點。若 B 為 $\overline{AC}$ 的中點，

則 $\overline{AC}=$ _______ 。

TRML 個人賽-2023 第二回

I-4. 已知三正數 a,b,c 依序成等比數列且 $a+b+c=78$。若 a,b,p,q,c 依序成等差數列，則 $p+q$ 的最大可能值為 ______ 。



I-5. 如圖，平面上 $ABFG$ 及 $BCDE$ 均為正方形。若 $\overline{AB}=6$，$\overline{AC}=8$，

$\angle BAC=90^\circ$，則 $\overline{GE}=$ ______ 。

I-6. 用 1, 2, 3 排成四位數，每個數字至少出現一次，且相同數字不能相鄰，則這樣的四位數有 _____ 個。

TRML 個人賽-2023 第三回

I-7. 若a,b為整數且滿足$\frac{112}{a}-\frac{17}{b}=1$，則$b$的最大值為 ____ 。

I-8. 對於每一個固定的實數$a\neq\frac{1}{2}$，滿足方程式$a^2+b^2+c=b^2+c^2+a=c^2+a^2+b$的數對$(b,c)$共有 _____ 組。

I-9. 坐標平面上，若一正三角形的三頂點x坐標分別為$0,2,7$，則此三角形之邊長為 _____ 。

TRML 個人賽-2023 第四回

I-10. 設在紅色袋中有分別編號為 1 號到 12 號的 12 個紅球，在白色袋中有分別編號 1 號到 12 號的 12 個白球。現從紅色袋中取出 7 個紅球，從白色袋中取出 5 個白球，則恰只有 2 個取出的白球上的號碼與 2 個取出的紅球上的號碼相同之機率為 _____ 。

I-11. 若正數a,b,c滿足$a+b=2c+1$且$a^2+b^2=4c^2+2c-1$，則c的最小值為 _____ 。

I-12. 假設$A(2,1,1)$為空間坐標中一點且平面$E:x+y+z=0$，而ℓ是平面E上通過點$B(1,-1,0)$的直線且與線段$\overline{AB}$垂直。若對於d為整數的點$C(1,d,1)$，直線ℓ上的所有點P都滿足$\sqrt{2}\cdot\overline{PA}>\overline{PC}$，則這種整數$d$有 _____ 個。

TRML 個人賽第一回-2023

題號	答案
I-1	867
I-2	127
I-3	$4\sqrt{2}$

TRML 個人賽第二回-2023

題號	答案
I-4	72
I-5	$\sqrt{340}$ 或 $2\sqrt{85}$
I-6	18

TRML 個人賽第三回-2023

題號	答案
I-7	1887
I-8	4
I-9	$2\sqrt{13}$

TRML 個人賽第四回-2023

題號	答案
I-10	$\frac{35}{132}$
I-11	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
I-12	7

TRML 接力賽-2023 第一回

R1-1. 已知二次函數 $f(x)$ 在 $x=-3$ 時有最小值 -10，且 $f(1)=22$，則 $f(0)=$ ______ 。

TRML 接力賽-2023 第一回

R1-2. 設 T 為前面傳來的答案。坐標平面上，若 O 為原點，且 P,Q 為圓 $x^2+y^2=T$ 上相異兩點，滿足 $\angle POQ=60^\circ$，則 $\left|\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}\right|^2=$ ______ 。

TRML 接力賽-2023 第一回

R1-3. 設 T 為前面傳來的答案。若 2×2 方陣 A 滿足

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 2\\ 0 & -1\\ 3 & 1\end{bmatrix}A=\begin{bmatrix}T & 3\\ -2 & 1\end{bmatrix},$$

則方陣 A 的行列式值為 ______ 。

TRML 接力賽-2023 第二回

R2-1. 若 n 為正整數且 $k=\log\sqrt{n}+\log\sqrt[3]{n}$ 也是一個正整數，則 k 的最小可能值為 ______ 。

TRML 接力賽-2023 第二回

R2-2. 設 T 為前面傳來的答案。坐標平面上，若 $y=x^2+6x+p$ 的圖形與直線 $y=2x+T$ 有交點，則 p 的最大可能值為 ______ 。

TRML 接力賽-2023 第二回

R2-3. 設 T 為前面傳來的答案。已知平面上有 T 條直線，每條直線恰與另兩條直線平行。若沒有三條直線交於一點，則總共有 ______ 個交點。

TRML 接力賽第一回-2023

題號	答案
R1-1	8
R1-2	24
R1-3	2

TRML 接力賽第二回-2023

題號	答案
R2-1	5
R2-2	9
R2-3	27