113 彰中

1 $\frac{14}{r^2+r+1}=n\in\mathbb{N}$, $1<r^2+r+1<3 \Rightarrow \frac{14}{3}<n<14$

n	
5	$5r^2+5r-9=0$, $D=25+180$ ×
6	$3r^2+3r-4=0$, $D=9+45$ ×
7	$r^2+r-1=0$ ×
8	$4r^2+4r-3=0$, $\begin{matrix}2 & +3\\ 2 & -1\end{matrix} \Rightarrow r=\frac{1}{2}$

2 $\frac{6x}{x+3y}+\frac{\frac{2}{3}(x+3y)}{x}-\frac{2}{3} \geq 2\cdot 2-\frac{2}{3}=\frac{10}{3}$

2024.5.23(四) ~ 5.28(二) Ru
待整理: 15, 17, 計算

填充題

1. 已知等差數列$\langle a_n\rangle$的公差$d\neq 0$，等比數列$\langle b_n\rangle$的公比r為正有理數且$r<1$。若$a_1=d$，$b_1=d^2$，且$\frac{a_1^2+a_2^2+a_3^2}{b_1+b_2+b_3}$為正整數，則$r=$? $\boxed{\frac{1}{2}}$

2. 設x,y為正實數，求$\frac{6x}{x+3y}+\frac{2y}{x}$的最小值? $\boxed{\frac{10}{3}}$

3 $a_{n-1}=a_{n-2}+a_n$, $a_n=a_{n-1}+a_{n+1}$
$\Rightarrow a_{n-1}-a_{n-2}=a_{n-1}+a_{n+1} \Rightarrow a_n=-a_{n+3}=a_{n+6}$

$a_2=a_1+a_3$, $a_3=a_2+a_4$, ⋮, $+)\ a_{n-1}=a_{n-2}+a_n$

$S_{n-1}-a_1=S_{n-2}+S_n-a_1-a_2$ $\Rightarrow a_{n-1}+a_2=S_n$

$2024\equiv 2 \pmod 6$
$\Rightarrow S_{2025}=a_{2024}+a_2=-1+(-1)=-2$

3. 數列$\langle a_n\rangle$滿足$a_{n-1}=a_n+a_{n-2}$，$n\geq 3$，設此數列前n項和為S_n。若$S_{2023}=2024$，$S_{2024}=2023$，則$S_{2025}=$? -2

4 $T=\frac{2\pi}{a}>2\pi \Rightarrow 0<a<1$, $-\pi<b<\pi$

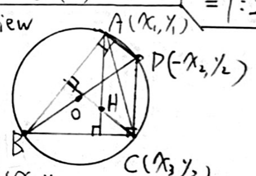
$-\pi<a(\frac{5}{8}\pi)+b=\frac{\pi}{2}+\square\pi<\frac{5}{8}\pi+\pi$ (1 or 0 or −1)
$-\pi<a(\frac{11}{8}\pi)+b=2\pi\times\triangle<\frac{11}{8}\pi+\pi$

△	□	
1	1	$\to a(\frac{3}{4}\pi)=\frac{\pi}{2}\Rightarrow a=\frac{2}{3}\Rightarrow\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{8}\pi+b=\frac{3}{2}\pi$ $\frac{-13}{12}\pi$ 不合
1	0	$\to a(\frac{3}{4}\pi)=\frac{3}{2}\pi\Rightarrow a=2$ 不合
1	−1	$\to a(\frac{3}{4}\pi)=\frac{7}{2}\pi\Rightarrow a=\frac{14}{3}$ 不合
0	−1	$\to a(\frac{3}{4}\pi)=\frac{\pi}{2}\Rightarrow a=\frac{2}{3}\Rightarrow b=\frac{-2}{3}\cdot\frac{11}{8}\pi=\frac{-11}{12}\pi$

4. 設函數$f(x)=3\cos(ax+b)$，其中$a>0$，$|b|<\pi$。若$f\left(\frac{5\pi}{8}\right)=0$，$f\left(\frac{11\pi}{8}\right)=3$，且$f(x)$的週期大於$2\pi$，則$b=$? $\frac{-11}{12}\pi$

6 review

O, G, H 共線
$\overline{OG}:\overline{GH}=1:2$



5 $|2z\cdot\bar{z}=2(\bar{z}+2)\cdot(\bar{z}+2)+(z^2+1)(\bar{z}^2+1)+31|$
$=2z\cdot\bar{z}+4z+4\bar{z}+4+z^2\cdot\bar{z}^2+z^2+\bar{z}^2+32$
$12ab=2ab+4a+4b+4+a^2b^2+a^2+b^2+32$
$\Rightarrow (ab-6)^2+(a+b+2)^2=0$
$\Rightarrow z\cdot\bar{z}=6\to\bar{z}=\frac{6}{z}$, $z+\bar{z}=-2$

5. 已知複數z滿足$12|z|^2=2|z+2|^2+|z^2+1|^2+31$，則$z+\frac{6}{z}=$? -2

$\overline{AD}\parallel\overline{CH}$, $\overline{AH}\parallel\overline{CD}$
$\Rightarrow \overrightarrow{OH}=(x_1+x_2+x_3,\ y_1+y_2+y_3)$
$\Rightarrow \overrightarrow{OH}=3\overrightarrow{OG}$

6. 設O為ΔABC的外心，H為ΔABC的垂心，若$\left|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right|=\sqrt{3}$，則$\left|\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}\right|=$? $2\sqrt{3}$

6 $|3\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}|\times 2=|3\overrightarrow{HG}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}|=2\sqrt{3}$

9 兩式相乘 $\Rightarrow \frac{(b+c)^2-a^2}{bc}-4+\frac{(c+a)^2-b^2}{ca}-4+\frac{(a+b)^2-c^2}{ab}=0$
$\Rightarrow \frac{(b-c)^2-a^2}{bc}+\frac{(c-a)^2-b^2}{ca}+\frac{(a-b)^2-c^2}{ab}=0$
$(b-c+a)(b-c-a)$, $(c-a+b)(c-a-b)$, $(a+b+c)(a+b-c)$
$\Rightarrow \frac{(a+b-c)}{abc}\left(a(b-c-a)+b(a-b-c)+c(a+b+c)\right)=0$

$t^3+3t^2+t-2=0$ 之根 1正2負
$\Rightarrow x^2=1/z^2$, $-y^2$ 有兩种情況

7. 已知實數x,y,z滿足$\begin{cases}x^6+3x^4+x^2=2\\ y^6-3y^4+y^2=-2\\ 2z^6-z^4-3z^2=1\end{cases}$，求$x^4+y^4+\frac{1}{z^4}=$?

7 7(有誤)
mathematica → $7-\sqrt{5}$ or $\frac{9-\sqrt{5}}{2}$

$t^3+3t^2+t-2=0$ 之3根 x^2, $(-y^2)$, $\frac{1}{z^2}$ → a, b, c
$\Rightarrow a^2+b^2+c^2=(-3)^2-2\cdot 1=7$ #

$x^2+x+2=0 \Rightarrow \frac{-1\pm\sqrt{7}i}{2}$ #

8. 設虛數z滿足$z^7=1$，求$z+z^2+z^4=$?

8 $\alpha+\beta=(z+z^2+z^4)+(z^6+z^5+z^3)=-1$, $\alpha\beta=(z+z^2+z^4)(z^6+z^5+z^3)=1+z+z^3+z^6+1+z^2+z^4+z^5+1=2$

9. 已知正實數a,b,c滿足$a+b+c=32$且$\frac{b+c-a}{bc}+\frac{c+a-b}{ca}+\frac{a+b-c}{ab}=\frac{1}{4}$，求以$\sqrt{a},\sqrt{b},\sqrt{c}$為三邊長的三角形的面積最大值? 4

9 $(\ \ )=ab-ac-a^2+ab-b^2-bc+ac+bc+c^2=c^2-(a-b)^2$
$\Rightarrow \frac{1}{abc}(a+b-c)(c+a-b)(c-a+b)=0$
$\Rightarrow a+b=c$ or $a+c=b$ or $b+c=a$
$\Rightarrow \angle C=90°$
$\Delta=\frac{1}{2}\sqrt{ab}\leq\frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{2}\right)=\frac{16}{4}=4$

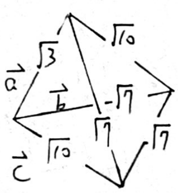
10 $\sqrt{2}$

10. 四面體$ABCD$中，$\overline{AB}=\sqrt{3}$，$\overline{AD}=\overline{BC}=\sqrt{10}$，$\overline{AC}=\overline{CD}=\overline{BD}=\sqrt{7}$，求此四面體的體積?

公式先備
$V=\frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix}\vec{a}\\ \vec{b}\\ \vec{c}\end{vmatrix}\right|$
$|AB|=|A||B|$
$|A|=|A^t|$

$\Rightarrow \begin{vmatrix}\vec{a}\\ \vec{b}\\ \vec{c}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\vec{a}\\ \vec{b}\\ \vec{c}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\vec{a}\\ \vec{b}\\ \vec{c}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\vec{a}^t & \vec{b}^t & \vec{c}^t\end{vmatrix}^2=\begin{vmatrix}\vec{a}\cdot\vec{a} & \vec{b}\cdot\vec{a} & \vec{c}\cdot\vec{a}\\ \vec{b}\cdot\vec{a} & \vec{b}\cdot\vec{b} & \vec{c}\cdot\vec{b}\\ \vec{c}\cdot\vec{a} & \vec{c}\cdot\vec{b} & \vec{c}\cdot\vec{c}\end{vmatrix}$

yymath



$\vec{b}\cdot\vec{a}=0$, $\vec{c}\cdot\vec{a}=3$, $\vec{b}\cdot\vec{c}=5$

$\begin{vmatrix}3 & 0 & 3\\ 0 & 7 & 5\\ 3 & 5 & 10\end{vmatrix}=3\cdot(70-21-25)=3\cdot 24$

$\Rightarrow V=\frac{1}{6}\sqrt{3\cdot 24}=\sqrt{2}$ #

$\boxed{11}$ 法: VV $\frac{1}{16}\times 2$; $\boxed{X}\sim \frac{3}{4}(1+E)$; $\boxed{VX}\sim \frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}(2+E)$; $+)$ $= E \Rightarrow E=20$

法2: 設 E_k = 連 k 次 r 球的期望值　　$X\sim Geo(p=\frac{1}{4})$

$\underbrace{rr\cdots r}_{k-1\text{个}}\ r$　　$\underbrace{rr\cdots r}_{k-1\text{个}}\ 非r$　　$\Rightarrow pE_k = E_{k-1}+1$　　$E_1 = \frac{1}{p} = 4$

$E_k = p(E_{k-1}+1) + (1-p)(E_{k-1}+1+E_k)$　　$\xRightarrow{p=\frac{1}{4}} E_k = 4E_{k-1}+4 \Rightarrow E_2 = 4\cdot 4+4 = 20$

20 **11.** 箱子裡有藍色、綠色、白色、紅色的球各一顆，現在每次從箱子裡抽出一球，觀察其顏色後放回箱中。假設任一顏色的球被抽中的機率相同，若連續兩次抽出紅球後即停止抽球，則抽球次數的期望值為何？

113 新北

$\boxed{12}$ 令 $a=\sin\theta$, $b=\cos\theta$, $c=\cos\phi$, $d=\sin\phi$

$\left(\frac{a^{2n+2}}{c^{2n}}+\frac{b^{2n+2}}{d^{2n}}\right)(c^2+d^2)^n \geq \left(a^{\frac{2n+2}{n+1}}+b^{\frac{2n+2}{n+1}}\right)^{n+1} = 1$

"=" 成立於 $\frac{\frac{a^{2n+2}}{c^{2n}}}{c^2} = \frac{\frac{b^{2n+2}}{d^{2n}}}{d^2} \Rightarrow \frac{a}{c}=\frac{b}{d} \overset{令}{=} t$

12. 設 θ,ϕ 為銳角且 $\frac{\sin^{2024}\theta}{\cos^{2022}\phi}+\frac{\cos^{2024}\theta}{\sin^{2022}\phi}=1$，則 $\sin^{2023}\theta-\cos^{2023}\phi=$？ 0

$\Rightarrow a^2+b^2 = t^2(c^2+d^2) = t^2 = 1 \Rightarrow t=1 \Rightarrow a=c \Rightarrow a-c=0$

$\boxed{13}$ $ab = 7-c(5-c) = c^2-5c+7$. 令 $f(c)=c^3-5c^2+7c$, $f'(c)=3c^2-10c+7$

13. 已知實數 a,b,c 滿足 $a+b+c=5$ 且 $ab+bc+ca=7$，若 abc 的最大值為 M，最小值為 m，則 $M+m=$？ $\frac{130}{27}$

$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-ab = \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 \geq 0 \Rightarrow \left(\frac{5-c}{2}\right)^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \geq ab = c^2-5c+7 \Rightarrow c^2-10c+25 \geq 4c^2-20c+28 \Rightarrow 3c^2-10c+3 \leq 0$　$\begin{matrix}3 & -1\\ 1 & -3\end{matrix} \Rightarrow \frac{1}{3}\leq c\leq 3$

$\begin{matrix}3 & -7\\ 1 & -1\end{matrix}$　$f(1)+f(\frac{7}{3}) = 3+\frac{49}{27}(7-5\cdot 3+9) = \frac{130}{27}$

$\boxed{14}$ **14.** 設 a,b,c,d 為相異四數且 $\{a,b,c,d\}$ 為 $\{x|x\in N, 1\leq x\leq 17\}$ 的子集，若 $17|(a-b+c-d)$，則稱 $\{a,b,c,d\}$ 為高斯集，則共有多少個高斯集？ 476

$\{a,c,b,d\} = \{4,1,3,2\} = \{1,4,3,2\} = \{3,2,4,1\}\cdots$

$3 \leq a+c \leq 33$ $(1+2)$ $(17+16)$　$(a+c)-(b+d) = 0, \pm 17$

15. 設 a,b,c 分別是 ΔABC 中 $\angle A,\angle B,\angle C$ 的對邊長，S 為 ΔABC 的面積，已知 $1+\frac{\tan B}{\tan A}=\frac{2c}{\sqrt{3}a}$，求 S 值的範圍？ $\frac{\sqrt{3}}{2}<S<\frac{2\sqrt{3}}{3}$

16. 設 a,b,c,d,e 為相異正整數，則滿足 $a+b+c=d+e=29$ 的序組 (a,b,c,d,e) 共有幾組解？ 7392

17. 已知拋物線 $y=x^2+bx+c$ 通過點 $(-2,5)$，且圖形交 x 軸於 A,B 兩點，交 y 軸於 C 點，設拋物線頂點為 M，若四邊形 $ACMB$ 面積為 9，求數對 $(b,c)=$？ $(-2,-3)$

$\boxed{16}$

$a'+b'+c'=26$

$29 = 1+1+27 = 2+2+25 = \cdots = 14+14+1$

$29 = 28+1 = 27+2 = \cdots = 15+14$

$(H^3_{26}-14\times 3)\times(14-3)\times 2!$

$=(14\times 27-14\times 3)\times 22 = 7392$

$a+c=b+d$

$4(C^2_2+C^3_2+\cdots+C^7_2) + C^8_2\times 3$

$=4C^8_3+28\cdot 3$

$=224+84$

$=308$

$\boxed{14}$

a+c	a c	個數
3	2 1	1
4	3 1	1
5	4 1 / 3 2	2
6	5 1 / 4 2	2
⋮	⋮	⋮
17	16 1 ⋮ 9 8	8
18	17 1 ⋮ 10 8	8
19	1 2 / 17 3 ⋮ 10 9	9-1=8
20	1 2 / 17 3 ⋮ 11 9	9-2=7
21	~	10-3=7
⋮		⋮
30	17 13 / 16 14	2
31		2
32		1
33		1

a+c	個數	b+d	個數
33	1	16	7
32	1	15	7
31	2	14	6
30	2	13	6
⋮	⋮	⋮	⋮
21	7	4	1
20	7	3	1

$(a+c)-(b+d)=17$

$2\cdot\sum_{k=1}^{7} k(8-k)$

$= 8\cdot 7\cdot 8 - 2\cdot\frac{7\cdot 8\cdot 15}{6}$

$= 168 \Rightarrow 308+168 = 476$