國立臺灣師範大學附屬高級中學 113 學年度第 2 次專任教師甄選數學科筆試〔題目卷〕

一、 選填題：（每題 5 分，共 90 分。填在答案卡上，分數或根式須以最簡形式回答，否則不予計分）

A. 藍天高中某班有 25 位學生(座號 1 到 25)，某節數學課，由座號 1 號的同學先在黑板寫一個正整數，其他同學再依座號順序陸續在黑板寫另一個正整數，進而形成一數列，且有以下規定：($k\in\mathbb{N}$)

(1) 座號為 $3k+1$ 者，寫出的數字必須比前一個同學減少 1；

(2) 座號為 $3k-1$ 者，寫出的數字必須比前一個同學增加 2；

(3) 座號為 $3k$ 者，寫出的數字必須比前一個同學增加 3。

例如：若 1 號同學寫出 4，則所得的數列為 $4,6,9,8,10,13,12,\cdots$。

若規定全班寫出的 25 個數的總和不超過 2024，則 1 號同學能寫出的正整數之最大值為 ①② 。

B. 若多項式函數 $f(x)$ 、 $g(x)$ 、 $h(x)$ 滿足以下條件：

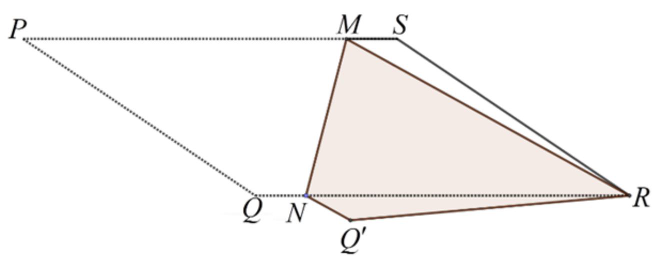
(1) $f(x)$ 為二次函數，且 $f(1)$ 為其最小的函數值，並有 $f(2)=5$ 。

(2) $g(x)$ 為一次函數，其圖形斜率為 -2，且 $y=g(x)$ 的圖形通過 $y=f(x)$ 圖形的頂點。

(3) $h(x)=f(x)\cdot g(x)$ 且 $y=h(x)$ 圖形的廣域(大域)特徵與 $y=px^3$ 的廣域(大域)特徵相同，其中 $|p|=6$。

根據上述條件，求 $y=h(x-1)$ 圖形的對稱中心之 x 坐標為 $\dfrac{③}{④}$ 。

C. 如右圖，平面上有一個平行四邊形 $PQRS$，沿著線段 $\overline{MN}$ 將平行四邊形對摺，恰好可讓 P 點與 R 點重合，且讓 Q 點坐落於 Q' 的位置，而 M、N 分別在 $\overline{PS}$、$\overline{QR}$ 上。若 $\overline{PQ}=6$、$\overline{PM}=4\sqrt{3}$、$\cos Q=-\dfrac{\sqrt{11}}{4}$，則摺痕長 $\overline{MN}=$ ⑤$\sqrt{⑥}$ 。



D. 在坐標平面上，滿足聯立不等式 $\begin{cases} y\le -1+\sqrt{36-x^2} \\ |x|+2|y|\le 10 \end{cases}$ 的解區域中，其 x、y 坐標均為整數的點共有 ⑦⑧ 個。

E. 已知$Q(x)$是一個最高次項係數為2的實係數多項式，滿足$\deg Q(x)=2$。若方程式$Q(x^2+8x-17)=0$有一個根為2且至少有一個重根，則多項式$Q(2x^2-5x+9)$除以$2x-1$的餘式中，所有**不同的**可能值之和為 ⑨⑩⑪ 。

F. 將編號為1、2、⋯、8的八個號碼球隨機放置在某圓周給定的八個等分點上，使每個等分點上恰一個球。設「圓周上所有相鄰兩球號碼之差的絕對值」之和為S，則S的最小值為 ⑫⑬ 。

G. 空間直角坐標系中有兩點$A(1, 2, 3)$與$B(3, 4, 5)$，若在xy平面上有一動點P，則$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2$的最小值為 ⑭⑮ 。

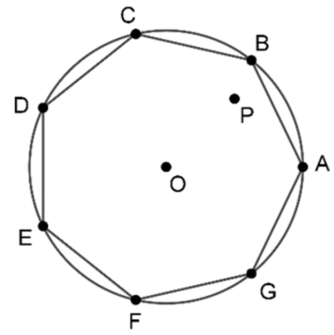
H. 一村莊的村民們將財物全放在教堂的一個箱子裡並鎖上，箱子上有36個鎖，任兩個鎖對應到的鑰匙不相同，現將鑰匙複製若干支分給村民，滿足每個村民擁有的鑰匙種類一樣多，且任意三個人可以打開箱子，但是任意兩個人無法打開箱子，則求此村莊的村民最多有 ⑯ 人。

I. 空間中12個相異平面最多可將此空間分割成 ⑰⑱⑲ 個區域。

J. 計算$\frac{1}{2^{16}}\left(1\times 2C_1^{16}+2\times 3C_2^{16}+3\times 4C_3^{16}+\cdots+16\times 17C_{16}^{16}\right)=$ ⑳㉑ 。

K. 若 $a_n=\sum_{k=1}^{2n}\frac{4n^2}{(2n+5k)^3}$, $n\in\mathbb{N}$，則 $\lim_{n\to\infty}a_n=$ $\underline{\frac{㉒}{㉓㉔}}$ 。

L. 如圖，在坐標平面上有一個半徑為 2 的圓，其圓心 O 為原點，且正七邊形 $ABCDEFG$ 內接於此圓。若 $A(2,0)$、$P(1,1)$，則 $\overline{PA}\times\overline{PB}\times\overline{PC}\times\overline{PD}\times\overline{PE}\times\overline{PF}\times\overline{PG}=$ $\underline{㉕\sqrt{㉖㉗㉘}}$ 。



M. 若正四面體其中兩條對稜分別落在直線 L_1：$\begin{cases}x=1+3t\\y=2+6t\\z=\sqrt{3}-5\sqrt{3}t\end{cases}$ $,t\in\mathbb{R}$ 與直線 L_2：$\begin{cases}x+2y=0\\z=0\end{cases}$ 上，則此正四面體的體積為 $\underline{\frac{㉙㉚\sqrt{㉛}}{㉜}}$ 立方單位。

N. 持續投擲一顆公正的骰子觀察其點數，直到點數 1、2、3、4、5、6 都至少出現 1 次時，則立即停止投擲。設隨機變數 X 為投擲的總次數，試求 X 的期望值 $E(X)=$ $\underline{㉝㉞.㉟}$ 。

O. 設常數 k 為整數，在坐標平面上函數圖形 Γ_1：$y=\frac{2}{9}x^3+x^2-\frac{2}{3}x+2k+1$ 與 Γ_2：$y=x^2+2x-4k-5$ 恰相交於相異三點，則圖形 Γ_1 與 Γ_2 所圍成的封閉區域之面積為 $\underline{㊱㊲}$ 。

P. 試求$\dfrac{|19x+13y|}{3}+\dfrac{|25x+17y|}{4}=1$的圖形內部面積為 ㊳㊴ 。

Q. 已知橢圓 Γ_1 與雙曲線 Γ_2 共焦點 $B(-6,0)$ 與 $C(4,0)$ ，又直線 L ： $x+2y=19$ 與 Γ_1 相切，且 $D(-6,\dfrac{9}{4})$ 在雙曲線 Γ_2 上。

若點 A 為 Γ_1 與 Γ_2 的其中一個交點，則△ABC 的面積為 ㊵㊶$\sqrt{㊷}$ 。

R. 已知實數 x, y 滿足 $x^2+xy+y^2=1$，求 $x^2-3xy-2y^2$ 的最大值為 $\dfrac{㊸+㊹\sqrt{㊺㊻}}{㊼}$ 。

二、 非選題：(共 10 分。請用黑色或藍色原子筆寫在作答卷上，須詳細過程，否則酌予扣分)

1. 教學中常使用不同方法解題，**一題多解**能夠培養學生多面向切入問題與選擇適當的解題方式。下題是教學中常見的例題，請利用**不同的方法**找出其解。(需列出解題過程、方法愈多愈好)

請求出空間中一點 $P(-5,0,-8)$ 到直線 $L:\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z+1}{2}$ 的距離。

國立臺灣師範大學附屬高級中學 113 學年度第 2 次專任教師甄選數學科筆試〔作答卷〕

二、 非選題：(共 10 分。請用黑色或藍色原子筆書寫，須詳細過程，否則酌予扣分)

1. 教學中常使用不同方法解題，**一題多解**能夠培養學生多面向切入問題與選擇適當的解題方式。下題是教學中常見的例題，請利用**不同的方法**找出其解。(需列出解題過程、方法愈多愈好，寫不下可接背面書寫)

請求出空間中一點 $P(-5,0,-8)$ 到直線 $L:\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z+1}{2}$ 的距離。

國立臺灣師範大學附屬高級中學 113 學年度第 2 次專任教師甄選數學科筆試〔參考解答〕

一、 選填題：(每題 5 分，共 90 分)

題號	答案	選填		題號	答案	選填		題號	答案	選填	
A	64	①	6	I	299	⑰	2	N	14.7	㉝	1
		②	4			⑱	9			㉞	4
B	$\frac{7}{3}$	③	7			⑲	9			㉟	7
		④	3	J	76	⑳	7	O	16	㊱	1
C	$2\sqrt{3}$	⑤	2			㉑	6			㊲	6
		⑥	3	K	$\frac{7}{72}$	㉒	7	P	12	㊳	1
D	89	⑦	8			㉓	7			㊴	2
		⑧	9			㉔	2	Q	$15\sqrt{3}$	㊵	1
E	352	⑨	3	L	$8\sqrt{226}$	㉕	8			㊶	5
		⑩	5			㉖	2			㊷	3
		⑪	2			㉗	2	R	$\frac{1+2\sqrt{13}}{3}$	㊸	1
F	14	⑫	1			㉘	6			㊹	2
		⑬	4	M	$\frac{16\sqrt{2}}{3}$	㉙	1			㊺	1
G	38	⑭	3			㉚	6			㊻	3
		⑮	8			㉛	2			㊼	3
H	9	⑯	9			㉜	3				

三、 非選題：(共 10 分)

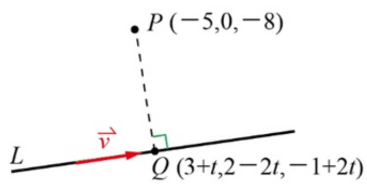
1. 教學中常使用不同方法解題，**一題多解**能夠培養學生多面向切入問題與選擇適當的解題方式。下題是教學中常見的例題，請利用**不同的方法**找出其解。(需列出解題過程、方法愈多愈好)

> 請求出空間中一點 $P(-5,0,-8)$ 到直線 $L:\frac{x-3}{1}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z+1}{2}$ 的距離。

法一：設垂足 $Q(3+t,2-2t,-1+2t)\Rightarrow\overrightarrow{PQ}=(8+t,2-2t,7+2t)$

$\because\overrightarrow{PQ}\perp L$，$\therefore(8+t,2-2t,7+2t)\cdot(1,-2,2)=0\Rightarrow t=-2\ \Rightarrow Q(1,6,-5)$

$\therefore d(P,L)=\overline{PQ}=\sqrt{(-5-1)^2+(0-6)^2+(-8+5)^2}=\sqrt{81}=9$。



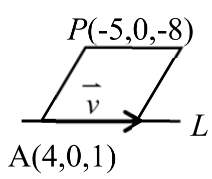
法二：直線 L 上任一點 $Q(3+t,2-2t,-1+2t)$，

$\overline{PQ}=\sqrt{(8+t)^2+(2-2t)^2+(7+2t)^2}=\sqrt{9t^2+36t+117}=\sqrt{9(t+2)^2+81}$，當 $t=-2$ 有最小值 9。

法三：直線 L 上取一點 $A(4,0,1)$，$\overrightarrow{AP}=(-9,0,-9)$、直線的方向向量 $\vec{v}=(1,-2,2)$，

$\overrightarrow{AP}\times\vec{v}=(-18,9,18)$

平行四邊形面積為 $\sqrt{(-18)^2+9^2+18^2}=27$，又 $|\vec{v}|=3$，$\therefore d(P,L)=\frac{27}{|\vec{v}|}=9$。



法四：直線 L 上任一點 $A(4,0,1)$，$\overrightarrow{AP}=(-9,0,-9)$ 在 $\vec{v}=(1,-2,2)$ 上的正射影 $\overrightarrow{AH}=(-3,6,-6)$，

P 在直線 L 上的投影點 H：$(4,0,1)+(-3,6,-6)=(1,6,-5)$，$\therefore\overline{PH}=d(P,L)=\sqrt{(-5-1)^2+(0-6)^2+(-8+5)^2}=9$。