高雄市113學年度市立高級中等學校聯合教師甄選

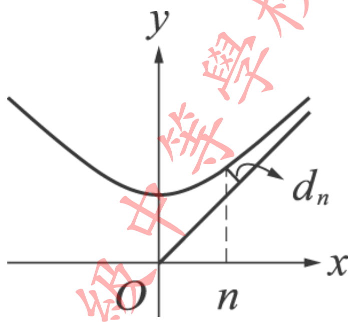
數學科試題卷

【※答案一律寫在答案本上】

一、 計算證明題(1至7題每題4分，8至16題每題8分，共100分)

請寫下完整計算過程，否則不予計分。

1. 雙曲線 $y^2-4x^2=1$ 圖形的上半部（如圖一），此雙曲線上 x 坐標為 n 的點與漸近線 $y=2x$ 的距離，記為 d_n，其中 n 為正整數。則 $\lim\limits_{n\to\infty}(n\cdot d_n)=$______



圖一

2. 實係數方程式 $3x^3+ax^2+bx-2=0$ 有一實根 α，與兩虛根 β、β^2+1，求數對 $(a,b)=$______

3. 設 $x,y,z\in R$，若 $x+y+z=3$，且 $x^2+y^2+z^2=9$，則 $x+y-2z$ 的最大值為 M，最小值為 m，求數對 $(M,m)=$______

4. $(1+\frac{1}{x})^{x+1}=(1+\frac{1}{2024})^{2024}$ ，求 $x=$______

5. 坐標平面上兩點 $A(-5,4)$ ，$B(6,9)$ ，O 為原點，在 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ 射線上各取一點 C ，D ，使 ΔOAB 面積與 ΔOCD 面積相等，且 $\overline{CD}$ 線段平行 x 軸，求 $\overline{CD}$ 線段長為______

6. 設m為實數，已知直線 $x+my=0$ 過定點 A，另一直線 $mx-y-m+3=0$ 過定點 B，兩直線交於點 $P(x,y)$，則線段乘積 $\overline{PA}\cdot\overline{PB}$ 的最大值為__________

7. 將橢圓 $\Gamma_1: x^2+2y^2=1$ 以原點 O 為中心，依逆時針方向旋轉 $60°$ ，可得橢圓 Γ_2 ，試問 Γ_2 的方程式____________

8. $L_1:\begin{cases} x=t \\ y=-t \\ z=-3t \end{cases}$ $(t\in R)$, $L_2:\begin{cases} x=2+s \\ y=-1-2s \\ z=-s \end{cases}$ $(s\in R)$ 設 $P(t,-t,-3t)$ 在 L_1 上，Q、R 為 L_2 的兩相異點，當 ΔPQR 為正三角形時，試以 t 表示 ΔPQR 的面積 = __________

9. 若 $\vec{a}=(-2,2,1),\ \vec{b}=(1,3,2),\ \vec{c}=(-2,3,1)$ ，則當 $|\vec{a}-s\vec{b}-t\vec{c}|$ 有最小值時，（s ， t） = ____________

10. 一座標平面上，O 為原點，點 A_1 、 A_2 在正向 x 軸上，點 B_1 、 B_2 在正向 y 軸上， $\overline{A_1B_1}=\overline{A_2B_2}=26$ ， $\angle B_2A_2O=2\angle B_1A_1O$ ，且 ΔB_2A_2O 的面積為 120，則 ΔB_1A_1O 的面積為多少_____________

11. 將表示式 $(x+y+z)^{2024}+(x-y-z)^{2024}$ 展開並合併同類項, 試問化簡後共有多少項_____________

12. 設 a，b 皆表實數，且滿足 $\sin a+\sin b=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ， $\cos a+\cos b=\frac{\sqrt{6}}{2}$ ，則 $\sin(a+b)$ 之值為多少_____________

13. 在ΔABC中，$\overline{AB}=2$，$\overline{BC}=1$，$\overline{CA}=\sqrt{3}$，分別在三邊$\overline{AB}$，$\overline{BC}$，$\overline{CA}$上分別各取一點D，E，F，使得ΔDEF為正三角形。設$\angle FEC=\theta$，當sinθ為多少時，ΔDEF周長最短_____________

14. 若連續自然數的數列a_1，a_2，⋯，a_n，⋯滿足$\log 2+\log\left(1+\frac{1}{a_1}\right)+\log\left(1+\frac{1}{a_2}\right)+\cdots+\log\left(1+\frac{1}{a_n}\right)=\log n$，則當此數列有最多項數為 m 項時，此自然數數列和S_m是多少＿＿＿＿＿＿

15. 設複數 z 滿足主幅角$\mathrm{Arg}(z+3)=\frac{3}{4}\pi$，則$\frac{1}{|z-3i|+|z+6|}$的最大值是＿＿＿＿＿＿

16. 箱中有編號 1 號到 7 號的 7 顆大小相同的球，每次從箱中任取出一球，再放回箱中，重複取球 n 次，並記錄這 n 次取球的數字總和為 S_n ，假設 S_n 除以 3 餘 1 的機率為 P_n，試求出 P_n（以 n 表示）＿＿＿＿＿＿＿＿