1. $x^4=-x+1$
$\Rightarrow (-x^2+x+2x^2+x+3)^2 = (x^2+2x+3)^2$
$= -x+1+4x^2+9+4x^3+6x^2+12x$
$= 4x^3+10x^2+11x+10$

2. $\frac{1}{a_n}=\frac{1}{2}\left((n+1)^{\frac{1}{3}}-(n-1)^{\frac{1}{3}}\right)$
$\Rightarrow \frac{1}{2}\left((2^{\frac{1}{3}}+\cdots 4096^{\frac{1}{3}})-(2^{\frac{1}{3}}+\cdots+4094^{\frac{1}{3}})\right)=\frac{1}{2}\cdot 2^4=8$

3. $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}|^2 = 9+4+1+2(3\cdot 2\cdot\frac{1}{2}+2\cdot 1\cdot\frac{1}{2}+3\cdot 1\cdot\frac{1}{2}) = 25 \Rightarrow \overline{AD}=5$

5. $x\ y\ z\ u$: $4\ 0\ 0\ 0 \to C^4_1\cdot 2=8$; $1\ 1\ 1\ 1 \to 2^4=16$; $\frac{24}{6\cdot6\cdot6\cdot6}=\frac{1}{54}$

臺北市立內湖高級工業職業學校 113 學年度正式教師甄選

筆試題目卷

科別：數學科　　範圍：數學科專業知能　　考試時間：100 分鐘

請注意：本試題共有兩部分，填充題 10 題及計算證明題 3 題，合計 100 分；

不可使用電子計算器。

壹、填充題 (每題 7 分，共 70 分；請在答案卷相對應的題號欄中寫下答案。)

(1) 求多項式 $(x^5+2x^2+x+3)^2$ 除以 (x^4+x-1) 所得之餘式為 $4x^3+10x^2+11x+10$

(2) 若 n 為正整數，且 $a_n=\sqrt[3]{(n+1)^2}+\sqrt[3]{n^2-1}+\sqrt[3]{(n-1)^2}$，試求 $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_3}+\frac{1}{a_5}+\cdots+\frac{1}{a_{4095}}=$ 8 。

2024/5/20(一) ~ 5/22(三) Ru

(3) 空間中相異四點 A、B、C、D，其中 $\overline{AB}=3$、$\overline{BC}=2$、$\overline{CD}=1$，且 $\angle ABC=120°$、$\angle BCD=120°$，又 $\overline{AB}$ 與 $\overline{CD}$ 的夾角為 $60°$，則 $\overline{AD}$ 的長 = 5 。

(4) 有 3 位高二學生與至少 10 位高三學生一起比賽猜拳，所有人彼此都恰比賽一次，每次比賽的兩位同學採用同時各出一拳的方式進行；勝者得 2 分，敗者得 0 分，若和局則各得 1 分。比賽結束後，已知 3 位高二學生總分之和為 20 分，且每位高三學生皆得 P 分，則 P = 18

4. 每局兩人得分和：2分
甲 乙: 2 0 / 0 2 / 1 1
設高三 n 人 $C^{n+3}_2\cdot 2-20=nP \Rightarrow n^2+(5-P)n-14=0$
$n\ge 10$, $n\in\mathbb{N}$, $n\mid 14$
$\Rightarrow 14+(-1)=P-5 \Rightarrow P=18$

(5) 投擲一顆公正的骰子四次，其出現點數依次為 a、b、c、d，則 $(a-3)^2+(b-3)^2+(c-3)^2+(d-3)^2=4$ 之機率為 $\frac{1}{54}$

(6) $[x]$表示小於或等於 x 的最大整數，則 $\left[\frac{10^{2025}}{10^{675}+2025}\right]$ 的末三位數為 624

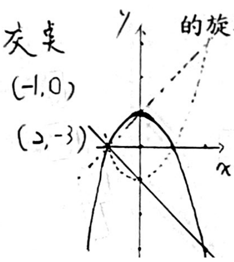
6. 令 $t=10^{675}$，$\left[\frac{t^3+2025^3-2025^3}{t+2025}\right] = [t^2-2025t+2025^2]-1 \equiv 624 \pmod{1000}$

(7) 橢圓 $\Gamma: \frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{10}=1$ 以原點為旋轉中心，逆時針旋轉 45° 後，得一新的橢圓 Γ'，則橢圓 Γ' 的方程式為 $3x^2+2xy+3y^2-20=0$ 。(答案請以 $ax^2+bxy+cy^2+d=0$ 的方式呈現，其中 a、b、c、$d\in Z$)

7. $x'+iy'=(x+iy)e^{i(\pi/4)}$
$\Rightarrow x+iy=(x'+iy')e^{i(-\frac{\pi}{4})}=(x'+iy')(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i)$
$\Rightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{\sqrt{2}}(x'+y') \\ y=\frac{1}{\sqrt{2}}(-x'+y') \end{cases} \Rightarrow \frac{(x'+y')^2}{10}+\frac{(x'-y')^2}{20}=1 \Rightarrow 3x^2+2xy+3y^2-20=0$

(8) 將曲線 $y=1-x^2$ 與直線 $x+y+1=0$ 所圍成的封閉區域，繞 x 軸旋轉一圈所形成的旋轉體體積為 $\frac{20\pi}{3}$ 。

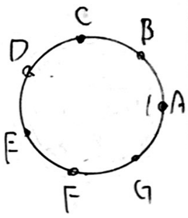
8. $\begin{cases} y=1-x^2 \\ y=-x-1 \end{cases}$
$x^2-x-2=0$
交點 $(-1,0)$ $(2,-3)$



$\pi\left(\int_{-1}^{0}(1-x^2)^2dx+\int_0^1(-x-1)^2dx+\int_1^2\left((-x-1)^2-((1-x^2)^2)\right)dx\right)$
x^4-2x^2+1　　x^2+2x+1　　$x^2+2x+1-(x^4-2x^2+1)$
令 $F(x)=\frac{1}{5}x^5-\frac{2}{3}x^3+x$，$G(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2+x$
$F(0)-F(-1)-F(2)+F(1)+G(2)$
$\Rightarrow \frac{-1}{5}(-1)-\frac{1}{5}(32)+\frac{1}{5}\cdot 1=-6$
$\frac{2}{3}(-1)+\frac{2}{3}(8)-\frac{2}{3}\cdot 1=4$
$G(2)=\frac{8}{3}+6$
$=\frac{20}{3}$

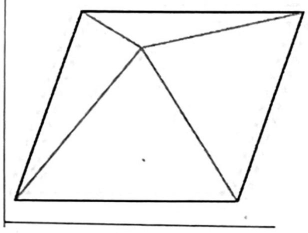
$\boxed{9}$ $x^7-1=(x-1)\underline{(x-w)\cdots(x-w^6)}$
$=(x-1)\underline{(x^6+x^5+\cdots+1)}$ $\overset{x=1}{\Rightarrow} 7$

$(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB})\cdot(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB})+\cdots+(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OG})\cdot(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OG})$
$=|2+2\overrightarrow{AO}\cdot(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\cdots+\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OA})=14$



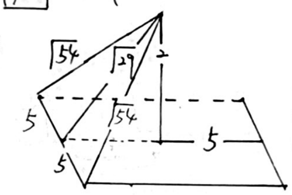
(9) $x^7=1$的七個根在高斯平面上所表示的點為 A,B,C,D,E,F,G，則$(\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{AD}\cdot\overline{AE}\cdot\overline{AF}\cdot\overline{AG})\cdot(\overline{AB}^2+\overline{AC}^2+\overline{AD}^2+\overline{AE}^2+\overline{AF}^2+\overline{AG}^2)=$ 98 。 $7\times14=98$

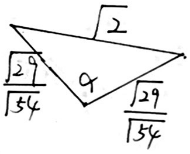
(10) 在空間中，一個斜面的「坡度」定義為斜面與水平面夾角 θ 的正切值 $\tan\theta$，有一個四角錐（底部為一正方形，四個斜面為等腰三角形）的每一個斜面的坡度皆為 $\frac{2}{5}$，如下圖所示。若相鄰斜面的夾角為 α，則 $\cos\alpha$ 的值為 $\frac{-25}{29}$ 。（化為最簡分數）



$\boxed{10}$ 法1:

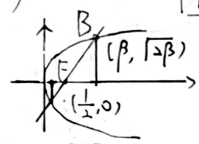
$\triangle=\frac{1}{2}\cdot10\cdot\sqrt{29}=\frac{1}{2}\sqrt{54}\cdot h \Rightarrow h=\frac{10\sqrt{29}}{\sqrt{54}}$





$\cos\alpha=\dfrac{2\cdot\frac{29}{54}-2}{2\cdot\frac{29}{54}}=\dfrac{-25}{29}$

計算 (1)
$y^2=4\cdot\frac{1}{2}\cdot x$



$A(\alpha,-\sqrt{2\alpha})$
$\begin{cases} y=m(x-\frac{1}{2}) \\ y^2=2x \end{cases}$
$\Rightarrow$
$m^2x^2-(m^2+2)x+\frac{1}{4}m^2=0$
$\Rightarrow \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$
$=\alpha\beta-2\sqrt{\alpha\beta}$
$=\frac{1}{4}-\frac{2}{2}$
$=\frac{-3}{4}$

貳、計算證明題(每題 10 分，共 30 分；請在答案卷相對應的題號中作答，並請寫下完整的計算或證明過程，否則不予計分。)

法2

$\cos\theta=\dfrac{\cos\gamma-\cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta}=\dfrac{\cos 90^\circ-\frac{5}{\sqrt{54}}\cdot\frac{5}{\sqrt{54}}}{\frac{\sqrt{29}}{\sqrt{54}}\cdot\frac{\sqrt{29}}{\sqrt{54}}}=\dfrac{-25}{29}$

(1) 已知直線 L (斜率為 m、$m>0$) 通過拋物線 $y^2=2x$ 的焦點，且與拋物線交於 A、B 兩點；設 A、B 兩點的 x 座標分別為 α、β，若 O 為原點，則 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=$ ________ 。

(2) 在函數 $f(x)=\frac{1}{x^2}$ 圖形的第一象限部分取一動點 P，過 P 作 f 的切線 L，若 L 與 x 軸、y 軸分別交於 A、B 兩點，則 $\overline{AB}$ 之最小值為______(5 分)，此時 P 點坐標為______。(5 分)

$\boxed{2}$ $f(x)=x^{-2}\Rightarrow f'(x)=-2/x^3$
設 $P(s,\frac{1}{s^2})\Rightarrow m=f'(s)=\frac{-2}{s^3}$
$\Rightarrow L: 2x+s^3y=3s$
過 $(\frac{3}{2}s,0)$ $(0,\frac{3}{s^2})$
$\Rightarrow \overline{AB}^2=\frac{9}{8}s^2+\frac{9}{8}s^2+\frac{9}{s^4}$
$\geq 3\cdot\frac{9}{4} \Rightarrow \min=\frac{3}{2}\sqrt{3}$
"=" 成立 $\Leftrightarrow \frac{9}{8}s^2=\frac{9}{s^4}$
$\Rightarrow s=\sqrt{2} \Rightarrow P(\sqrt{2},\frac{1}{2})$

$\boxed{3}$ (3) 請證明

$$\sum_{k=1}^{90} 2k\sin 2k^\circ \text{ 的平均值 }=\cot 1^\circ$$

w.t.s. "原式 $=90\cdot\frac{\cos 1^\circ}{\sin 1^\circ}$"

$2(1\cdot\sin2^\circ+89\cdot\sin2^\circ)$
$+2(2\cdot\sin4^\circ+88\cdot\sin4^\circ)+$
$\vdots$
$+2(44\sin88^\circ+46\sin88^\circ)+2\cdot45\cdot\sin90^\circ$
$=2\cdot90\cdot(\sin2^\circ+\sin4^\circ+\cdots+\sin88^\circ)+90$
$=90\cdot\frac{2}{\sin1^\circ}(\sin2^\circ\sin1^\circ+\sin4^\circ\sin1^\circ+\cdots+\sin86^\circ\sin1^\circ+\sin88^\circ\sin1^\circ)+90$
$=90\cdot\frac{1}{\sin1^\circ}(\cos1^\circ-\cos3^\circ+\cos3^\circ-\cos5^\circ+\cdots+\cos85^\circ-\cos87^\circ+\cos87^\circ-\cos89^\circ)+90$
$=90\cdot\frac{1}{\sin1^\circ}(\cos1^\circ)-90+90=90\cdot\cot1^\circ$ #

《試題結束》