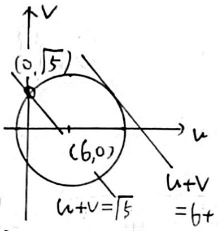
2 令 $u=\log_2 x \ge 0$
$v=\log_2 y \ge 0$

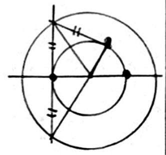
$u^2+v^2=12u+5$
$\Rightarrow (u-6)^2+v^2=41$
$\begin{cases} u=6+\sqrt{41}\cos\theta \\ v=\sqrt{41}\sin\theta \end{cases}$



3 $\left|2\left(\frac{-1}{2}+\frac{\sqrt3}{2}i\right)-z\right|=\left|2\left(\frac{-1}{2}+\frac{\sqrt3}{2}i\right)^2-\bar z^3\right|$

$Arg(-1+\sqrt3 i)=\frac{2}{3}\pi$　$Arg(z)=0$ or $\frac{\pi}{3}$

$\Rightarrow z=1$ or $\frac12+\frac{\sqrt3}{2}i$



5 $f(0)=1$
設 $g(x)=12x^2-6x+A$
$\Rightarrow g(0)=A$
$f(x)=4x^3-3x^2+Ax+1$
$\Rightarrow \int_0^1 f(x)dx=\left(x^4-x^3+\frac{A}{2}x^2+x\right)\Big|_0^1=\frac{A}{2}+1$
$\Rightarrow g(x)=12x^2-6x+\frac{A}{2}+1+g(1)-g(0)$
$\Rightarrow g(0)=1+\frac{A}{2}+g(1)-g(0)$
$\Rightarrow g(0)=\frac{A}{2}+7=A$
$\Rightarrow g(0)=A=14$

國立臺南第二高級中學113學年度第一次教師甄選數學科試題

2024.5.18(六) ~ 5.19(日) 星巴克 Ru

一、填充題（每題5分，共60分）（只需將答案寫在答案卷上，並註明題號）

1. 已知 ΔABC 之重心、內心分別為 G、I，且 $\overline{BC}=42$，$\overline{AB}>\overline{AC}$。若 $\overline{GI}=2$ 且 $\overline{GI}\,//\,\overline{BC}$，$\overrightarrow{AI}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，求數對 $(x,y)=$ $\left(\frac{2}{7},\frac{8}{21}\right)$。

   1 $\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GI}=\frac13\overrightarrow{AB}+\frac13\overrightarrow{AC}+\frac{1}{21}(-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=\frac27\overrightarrow{AB}+\frac{8}{21}\overrightarrow{AC}$

2. 已知 $x,y\ge1$ 且 $(\log_2 x)^2+(\log_2 y)^2=\log_2(4x^4)+\log_2(8x^8)$，若 $\log_2(xy)$ 的最大值為 M、最小值為 m，求 $M+m=$ $6+\sqrt5+\sqrt{82}$。

3. 在複數平面上，複數 z 滿足 $|z|=1$ 且 $\left|-1+\sqrt3 i-z\right|=\left|\frac{(-1+\sqrt3 i)^2}{2}-\overline{z^3}\right|$，其中 $i=\sqrt{-1}$。

   若 $Arg(z)\le Arg(-1+\sqrt3 i)$，則複數 $z=$ 1 or $\frac12+\frac{\sqrt3}{2}i$。

4. 已知正數 a、b 滿足 $a+b=2$，試求 $\sqrt{4a+\frac13}+\sqrt{6b+\frac15}$ 的最大值為 $\sqrt{\frac{127}{6}}=\frac{\sqrt{762}}{6}$

   4 $\left(a+\frac{1}{12}+b+\frac{1}{30}\right)(4+6)\ge(\ )^2$
   $\sqrt{\left(2+\frac{7}{2\cdot5\cdot6}\right)\times10}=\sqrt{\frac{127}{6}}$ #

5. 設 $f(x)=\int_0^x g(t)dt+1$，$g(x)=12x^2-6x+\int_0^1[f(t)+g'(t)]dt$，求 $g(0)=$ 14

6. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(\sqrt1+\sqrt8+\sqrt{27}+\cdots+\sqrt{n^3})^2}{n^5}=$ $\frac{4}{25}$

   6 $\left(\frac1n\sum\left(\frac kn\right)^{\frac32}\right)^2\to\left(\int_0^1 x^{\frac32}dx\right)^2=\frac{4}{25}$

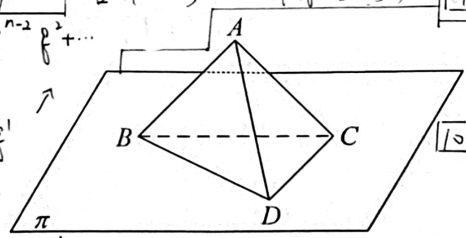
7. 投擲一個六面分別刻上 1, 1 ,1, 2, 2, 3 的公正骰子 n 次，則點數和為偶數的機率為 $\frac12\left(1+\left(-\frac13\right)^n\right)$

   7 令 P_n = 丟 n 次 和為偶數的 prob
   法1
   $P_n=\frac13P_{n-1}+\frac23(1-P_{n-1})$
   $=-\frac13P_{n-1}+\frac23$
   $x=-\frac{x}{3}+\frac23$
   $\Rightarrow k=\frac12$
   $P_n-\frac12=\left(\frac13\right)^{n-1}\left(\frac13-\frac12\right)=\left(\frac{-1}{3}\right)^n\cdot\frac12$
   $\Rightarrow$ #

8. 以 x^3+2x^2+2x+1 除 $x^{2024}-2x^{427}+3x^{113}-4x$ 所得的餘式為 $-2x^2-12x-6$

9. 設 x 為實數，則 $\sqrt{x^4-4x^2-12x+25}+\sqrt{x^4+2x^2+1}$ 的最小值為 5

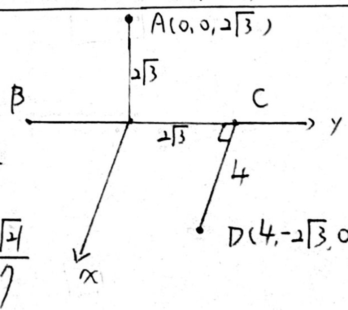
10. 如圖，在平面 π 上有一直角三角形，其中 $\angle BCD=90^\circ$，$\angle CBD=30^\circ$，另一個等腰直角 $\triangle ABC$ 所在的平面垂直於平面 π，其中 $\angle BAC=90^\circ$，若 $\overline{CD}=4$，求 $\overleftrightarrow{AD}$ 與 $\overleftrightarrow{BC}$ 間的距離為 $\frac{4\sqrt{21}}{7}$



7 法2
所求 $C_0^np^n q^0+C_2^np^{n-2}q^2+\cdots$
$=\frac12\left(1+\left(-\frac13\right)^n\right)$　$\left(p-q=\frac13-\frac23\right)$
$(p+q)^n=C_0^np^nq^0+C_1^np^{n-1}q^1+C_2^np^{n-2}q^2+\cdots$
$(p-q)^n=C_0^np^nq^0-C_1^np^{n-1}q^1+C_2^np^{n-2}q^2+\cdots$

9 $\sqrt{(x^2-4)^2+(2x-3)^2}+\sqrt{(x^2+1)^2+(2x-2x)^2}$
令 $P(x^2,2x)$ $A(4,3)$ $B(-1,2x)$
$\overline{PA}+\overline{PB}\ge\overline{AB}=\sqrt{(2x-3)^2+25}\ge5$

8 $x^3+1+2x(x+1)$
$=(x+1)(x^2+x+1)$
$f(w)=w^2-2w+3w^2-4w=-10w-4$
$\Rightarrow f(x)=(x+1)(x^2+x+1)Q(x)+A(x^2+x+1)-10x-4$
$f(-1)=A+6=1+2-3+4$
$\Rightarrow A=-2$
$\Rightarrow -2x^2-12x-6$

10


$\overrightarrow{AD}\to(2,-\sqrt3,\sqrt3)$
$\overrightarrow{BC}\to(0,1,0)$
$(-\sqrt3,0,-2)$ …
$E_{pc}:\sqrt3x+0y-2z=0$，$d(A,E)=\frac{4\sqrt3}{\sqrt7}=\frac{4\sqrt{21}}{7}$

1

$X \sim B_{in}(n=10,\ p=\frac{3}{5})$

$\boxed{11}$ $Var(X)=E(X^2)-(EX)^2$

$\Rightarrow E(X^2)=10\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{5}+36$

$\frac{192}{5}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot5^{10}$

$=(2.5)^5\cdot5^4=62500000$

11. $\sum_{k=1}^{10}3^{k-1}\cdot2^{9-k}\cdot k^2C_k^{10}=$ $\underline{62500000}$ 。

12. 在$\triangle ABC$中，已知$\frac{a+b}{a}=\frac{\sin B}{\sin B-\sin A}$，且$\cos(A-B)+\cos C=1-\cos 2C$，則

$\frac{a+c}{b}=\frac{\sqrt5-1}{2}+\sqrt{\frac{\sqrt5-1}{2}}$

$\boxed{12}$ $\hookrightarrow b^2-a^2=ab$

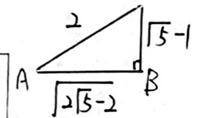
$b^2-a^2=c^2\Rightarrow\boxed{\angle B=90^\circ}\longleftarrow\Rightarrow ab=c^2$

$\cos(A-B)-\cos(A+B)=2\sin^2C$

$\Rightarrow 2\sin A\sin B=2\sin^2C$

$\Rightarrow \sin A=\cos^2A=1-\sin^2A$

$\Rightarrow s^2+s-1=0\Rightarrow\sin A=\frac{-1+\sqrt5}{2}$



二、計算證明題（每題 10 分，共 40 分）（需將演算過程寫在答案卷上，並註明題號）

1. 設 n 是正整數，$A=\begin{bmatrix}-1&4&2\\-1&3&1\\-1&2&2\end{bmatrix}$，試計算$A^n$。

2. 設$\triangle ABC$的三邊長為a,b,c，面積記為$\triangle$，試證明：$\frac{a^2+b^2+c^2}{\triangle}\geq4\sqrt3$。

97松山家商 魏琴伯克不等式

$\boxed{2}$ a^2

$(b^2+c^2-2bc\cos A)+b^2+c^2-4\sqrt3\cdot\frac{bc\sin A}{2}$

$=2(b^2+c^2)-4bc(\frac{1}{2}\cos A+\frac{\sqrt3}{2}\sin A)$

$=2(b^2+c^2)+4bc(-\sin(A+30^\circ))$

$\geq2(b^2+c^2)+4bc\cdot(-1)$

$=2(b-c)^2\geq0$

$(-1\leq-\sin(\ )\leq1)$

$\Rightarrow$ #

3. 以O為原點的xy平面上，取二點$A(\sqrt3,1)$，$B(-1,\sqrt3)$，$t\in R$，點P滿足

$\overrightarrow{OP}=t^2\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$，求$P$點的軌跡與$x$軸所圍成的圖形的面積。

有夠難 4. 設$\triangle ABC$外接圓的半徑為R；內切圓的半徑為r；外心為O；內心為I，試證：

$\overline{OI}^2=R^2-2Rr$ 。

$\boxed{3}$

設$P(x,y)$

$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sqrt3t^2-t\\t^2+\sqrt3t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt3}{2}&-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{\sqrt3}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2t^2\\2t\end{bmatrix}$

$x+iy=e^{i(\frac{\pi}{6})}(x'+iy')$

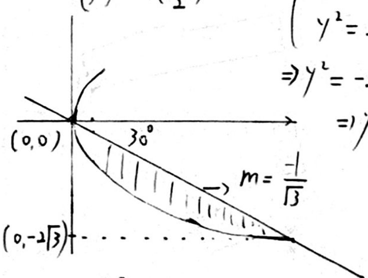
$x'=2t^2=2(\frac{y'}{2})^2=\frac{(y')^2}{2}$

$\Longrightarrow(y')^2=4(\frac{1}{2})x'$

$\begin{cases}x+\sqrt3y=0\\y^2=2x\end{cases}$

$\Rightarrow y^2=-2\sqrt3y$

$\Rightarrow y=0$ or $-2\sqrt3$

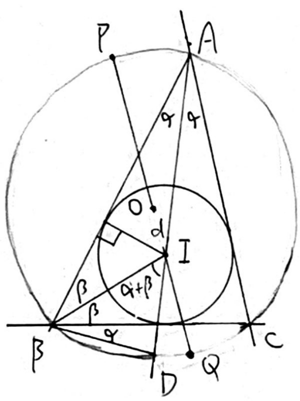


$\int_{-2\sqrt3}^{0}(-\sqrt3y-\frac{1}{2}y^2)dy$

$=\left(\frac{\sqrt3}{2}y^2+\frac{1}{6}y^3\right)\Big|_0^{-2\sqrt3}=6\sqrt3-4\sqrt3$

$=2\sqrt3$ #

$\boxed{4}$ 歐拉定理（幾何）



$\overline{ID}=\overline{BD}$

$\overline{AI}\times\overline{ID}=\overline{PI}\times\overline{IQ}$

$\Rightarrow\frac{r}{\sin\alpha}\cdot2R\sin\alpha=(R+d)(R-d)$

$\Rightarrow2Rr=R^2-d^2$

$\Rightarrow\overline{OI}^2=R^2-2Rr$