臺北市立西松高級中學 113 學年度高中部第 1 次正式教師甄選
【數學科（IB）】初試試題

一、填充題：(配分如後標有(*)：4 分；未標示：6 分。共 58 分。)

1.已知兩拋物線$\Gamma_1: x^2-2x-4y+5=0$和$\Gamma_2: y^2+4x+4y+12=0$對稱於直線L，

(1)求對稱線L的方程式為________。(*)

(2)若在兩拋物線各取一點P，Q，則$\overline{PQ}$長度之最小值為_______。(*)

2.將{馬是小馬是小小馬}8 個字排成一列，試回答下列問題?

(1)三個馬相鄰，三個小完全分開有 ______種不同的排法。(*)

(2)同字皆不相鄰有 ______種不同的排法。

3.回答下列與數相關的問題:

(1)若將$a=(2+\sqrt{5})^{20}+(2-\sqrt{5})^{20}$展開後，其個位數字為______。(*)

(2)若將$b=(2+\sqrt{5})^{20}$展開後，其整數部分的末兩位數為______。

4.將座標平面上一定點P以圓點O為中心旋轉$\dfrac{\pi}{3}$，再對直線$y=mx$做鏡射。其結果相當於直接對直線$y=m'x$做鏡射。試以m表示m'之值為_______。

5.求$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{n^{2}+n+1}{3^{n}}=$________。

6.$\triangle ABC$，在$\overline{BC}$邊上取一點D使得$\overline{BD}=\overline{AC}$。若$\angle DAC=\frac{\pi}{3}$，$\angle ACD=\frac{2\pi}{9}$，

求$\angle BAD=$________。

7.圓之內接四邊形$ABCD$，若向量$\overrightarrow{AC}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{5}{2}\overrightarrow{AD}$，則$sin\angle DAB$：$sin\angle ABC=$________。

8.求$\int_{-1}^{1}\frac{x^{2}}{1+2^{x}}dx=$________。

二、計算證明題：（共 42 分）

1. $\triangle ABC$ 中，在 $\overline{AC}$ 上取一點 D 使得 $\overline{CD}=2\overline{AD}$ ，在 $\overline{BC}$ 上取兩點 E，F 使得

$\overline{BE}=\overline{EF}=\overline{FC}$ ，且連接 $\overline{AE}$ ， $\overline{AF}$ 分別交 $\overline{BD}$ 於點 P，Q，則求:

(1) $\overline{AP}:\overline{PE}$ (2%) (2) $\overline{BP}:\overline{PQ}:\overline{QD}$ (4%) (3)$\triangle BPE$:$\triangle APQ$ 之面積比 (4%)

2. Try to answer the following questions about the asymptotes of hyperbolic curves ?
You can answer in either Chinese or English.

(1) Given a hyperbola $y=f(x)=\dfrac{2}{x+1}+3$, find the focal point within the first quadrant ? (5%)

(2) Given a hyperbola $\dfrac{(x+1)^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1 \Rightarrow \dfrac{y^2}{9}=\dfrac{(x+1)^2}{16}-1 \Rightarrow \dfrac{y}{3}=\pm\sqrt{\dfrac{(x+1)^2}{16}-1}$ ，When X approaches infinity, neglecting-1==>Take $\Rightarrow \dfrac{y}{3}=\pm\dfrac{(x+1)}{4}$ as the two asymptotic lines.

Student A may ask: why not neglect +1 as well and take $\dfrac{y}{3}=\pm\dfrac{x}{4}$ as the asymptotic lines?

What would you answer him/her? (5%)

3. Try to use basic differential aspects (ex. ascending /descending sections, concave up or down, extremes, inflection points….) to figure out the general profile and its corresponding conditions of the following quartic polynomial $y=f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ ，(其中 $a>0$) (10%)

You can answer in either Chinese or English.

4. 圓錐曲線之定義可以從離心率的角度來思考

給定一直線 L(準線)，一定點 F(焦點)，則圓錐曲線上任一動點 P，皆滿足 $\dfrac{\overline{PF}}{d(P,L)}$ 為一定值 e，定義 e 為離心率。(其中 $d(P,L)$ 為點 P 到直線 L 的距離)

因此當 e=1 時，動點 P 的軌跡所形成的曲線為拋物線(課本的定義)；其實當 e<1 時，動點 P 的軌跡為橢圓；而 e>1 時，動點 P 的軌跡為雙曲線。

以橢圓為例，若原點 O 為焦點，對稱軸為水平線(x 軸)，

給定的離心率 $e=\dfrac{\overline{PF}}{d(P,L)}=\dfrac{c}{a}<1$，則其橢圓的方程式為 $\dfrac{(x-c)^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$。

依上述橢圓的狀況，試著證明或說明下列相關的問題:

給定離心率 $e=\dfrac{c}{a}$，正焦弦長的一半 $l=\dfrac{b^2}{a}$，令 $k=\dfrac{1}{1-e^2}$

(1)則 $a=lk$，$b=l\sqrt{k}$，$c=elk$ (3%)

(2)可將橢圓方程式 $\dfrac{(x-c)^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 改寫為 $(\dfrac{1}{k})x^2+y^2=(2el)x+(l^2)$ (4%)

(3)若將 e 趨近於 1，此橢圓曲線會慢慢趨近於拋物線 $y^2=2l(x+\dfrac{l}{2})$ (5%)