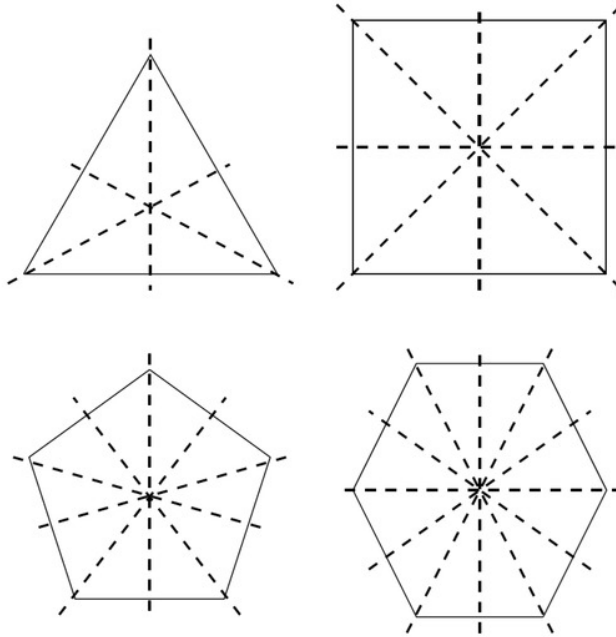


國立成功大學數學系

110 學年度

學士班申請入學

數學學科筆試



個人申請編號： \_\_\_\_\_

姓名： \_\_\_\_\_

試題說明：

1. 本試題含九大題，總分一百分。
2. 測驗時間：150 分鐘
3. 請在每一試題所屬頁面作答。若使用試題背面，請標示清楚。
4. 請完整寫出解答過程。
5. 本考試卷總共有 14 頁(含封面與空白頁面)。

題號	滿分	得分
1	15	
2	10	
3	15	
4	10	
5	10	
6	10	
7	10	
8	10	
9	10	
總分		

1. (15 分) 令  $f(x)$  為一個多項式函數，且  $a, b, L$  為實數。

(a) (5 分) 已知  $f(a) > L$  且  $f(b) < L$ 。試證明存在一個介於  $a, b$  之間的實數  $c$

使得  $f(c) = L$ 。

(b) (10 分) 已知  $f(x)$  為三次多項式函數，其首項係數為正數且在坐標平面

上，函數  $y = f(x)$  的圖形與每條水平線都僅有一個交點。試證明當  $x < y$

時， $f(x) < f(y)$ 。

本頁空白

2. (10 分)給定空間中兩向量  $\vec{u} = (1, 2, 3)$  與  $\vec{v} = (4, 5, 6)$ 。試在空間中找到一個單位向量  $\vec{w}$  使得由  $\vec{u}$ 、 $\vec{v}$  與  $\vec{w}$  所組成的平行六面體體積能達到最大值並求出此時的體積。

3. (15 分) 令  $f(x) = \frac{1}{2} + \cos x + \cos(2x) + \cdots + \cos(10x)$ 。

(a) (10 分) 試證明  $f(x) = \frac{\sin\left(\frac{21x}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$ 。提示：用  $z = \cos x + i \sin x$  將  $\cos x$  表示成

$$\cos x = \frac{z + \bar{z}}{2}。$$

(b) (5 分) 在滿足  $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$  的條件下，試求出方程式  $f(x) = 0$  解的個數。

4. (10 分) 已知  $\triangle ABC$  其  $\angle A, \angle B, \angle C$  的對邊長分別為  $a, b, c$ 。若  $H$  為  $A$  到  $\overline{BC}$  線段的垂足且  $\overline{AH} = x\overline{AB} + y\overline{AC}$ ，則  $(x, y)$  為何？

5. (10分) 給定圓心在圓點的單位圓  $O$  與點  $P\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ 。

(a) (4分) 已知直線  $L_1$  斜率為  $m$  且通過點  $P$ 。若  $L_1$  與圓  $O$  交於兩點  $A, B$ ，試利用  $m$  表示  $\overline{AB}$ 。

(b) (4分) 已知直線  $L_2$  通過點  $P$  且與  $L_1$  垂直。若  $L_2$  與圓  $O$  交於兩點  $C, D$ ，試利用  $m$  表示  $\overline{CD}$ 。

(c) (2分) 試計算  $\overline{AB}^2 + \overline{CD}^2$  之值。



本頁空白

6. (10 分)已知  $\triangle ABC$  其  $\angle A, \angle B, \angle C$  的對邊長分別為  $a, b, c$  且其面積為  $\Delta$ 。在三角形內部取一點  $P$ ，以  $x, y, z$  分別表示  $P$  到  $\overline{AB}$ 、 $\overline{BC}$ 、 $\overline{AC}$  的距離。試計算  $3\sqrt{x} + 2\sqrt{y} + \sqrt{z}$  的最大值並求出此時的  $x, y, z$  (以  $a, b, c, \Delta$  表示之)。

7. (10 分)有一個連續投擲一個公正硬幣可獲得獎金的遊戲，由於莊家資金有限，遊戲獎金單次最高金額為一百萬。若玩家連續投擲 $k$ 次，前 $k-1$ 次均出現正面且第 $k$ 次時出現反面，玩家即可獲得 $2^{k-1}$ 元，此時遊戲結束。試問
- (a) (5 分)玩家至少要玩幾次才可獲得最高金額獎金？
- (b) (5 分)在每次遊戲前，莊家應向玩家收多少錢才公平？

8. (10 分)試求出所有滿足方程式  $\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=\sqrt{2}$  的實數解。

本頁空白

9. (10 分)已知某強烈傳染性疾病的發生率為 1%，醫院為了判斷患者是否感染該疾病使用了某快篩試劑來輔助醫生診斷，試劑判讀結果會用陽性反應(疑似感染)與陰性反應(疑似未感染)來呈現。若患者檢驗報告呈陽性反應，則該患者有 95%的機率為此疾病的感染者；若患者檢驗報告呈陰性反應，則該患者有 98%的機率未感染該疾病。
- (a) (5 分)若某一位民眾感染該疾病，試問他/她的檢驗報呈陽性反應的機率為何?
- (b) (5 分)若某一位民眾未感染該疾病，試問他/她的檢驗報告呈陰性反應的機率為何?