113 全國

$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}c^2=c^2+3bc\cos A \Rightarrow 3bc\cos A=-\frac{1}{2}c^2<0 \Rightarrow \cos A=-\frac{5}{2\sqrt{13}}$

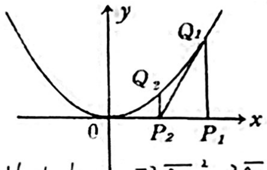
$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}b^2=bc\cos A+3b^2 \quad bc\cos A=-\frac{5}{2}b^2<0 \Rightarrow \sin A=\frac{\sqrt{21}}{6}$

3. 設$O$為$\Delta ABC$的外心，若$\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}$，則$\sin\angle BAC=$？ $\frac{\sqrt{21}}{6}$

4. 已知$a>b>0$，$a,b,c$為整數，且$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$，$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x^6-1}=2$，試求$a,b,c$之值 $a=4,b=1,c=-6$

$f(1)=0$ $\lim_{x\to1}\frac{f'(x)}{6x^5}=2$ $\begin{cases}a+b+c=-1\\2a+b=9\end{cases}$ $\Rightarrow(4,1,-6)$

5. 自$P_1(1,0)$作$x$軸的垂直線交拋物線$y=x^2$於$Q_1(1,1)$，再由$Q_1$作此拋物線的切線交$x$軸於$P_2$，又自$P_2$作$x$軸的垂線交此拋物線於$Q_2$，如此依序進行，試求級數$\overline{P_1Q_1}+\overline{P_2Q_2}+\cdots\cdots+\overline{P_nQ_n}+\cdots\cdots$之和。$\frac{4}{3}$



$f(x)=x^2$, $f'(x)=2x$, $y-f(x_n)=f'(x_n)(x_{n+1}-x_n)$, $y=0$

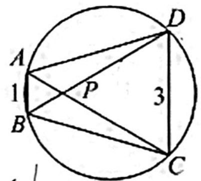
$\Rightarrow x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ $x_1=1,\ x_2=1-\frac{1}{2}\cdot1=\frac{1}{2},\ x_3=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}\cdots \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^k=\frac{4}{3}$

6. 有一個$n$項的等差數列$\langle a_n\rangle$，若公差為$\frac{\sqrt{13}}{2}$且此數列的變異數為260，試問項數$n=$？$n$=31

6 法：當$n=2k+1$ $\frac{13}{4}\left(\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}\right)\cdot2=260(2k+1) \Rightarrow k(k+1)=240=8\cdot2\cdot15 \Rightarrow k=15, n=31$

法2：考慮Data: $1,2,\cdots,n$ $(d=1)$ $\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-n\left(\frac{n+1}{2}\right)\left(\frac{n+1}{2}\right)\right)/n=\frac{(n+1)}{6\cdot2}(4n+2-(3n+3))$ $\Rightarrow \frac{n^2-1}{12}\cdot\frac{13}{4}=260 \Rightarrow n^2=961 \Rightarrow n=31$

7. 如右圖，圓內接四邊形$ABCD$中，$\overline{AB}=1$，$\overline{CD}=3$，$\overline{BD}=4$，$\angle ABD=60°$，設$\overline{AC}$與$\overline{BD}$相交於$P$點，求$\Delta BCP$面積。 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$



7: $\overline{AD}^2=16+1-4 \Rightarrow \overline{AC}^2-3\overline{AC}-4=0$, $=\overline{AC}^2+9-3\overline{AC} \Rightarrow \overline{AC}=4$, $\frac{\sqrt{3}}{4}\times3=\frac{3\sqrt{3}}{4}$

法2: $\overrightarrow{OB}+3\overrightarrow{OC}=3\overrightarrow{OA'} \Rightarrow 1+6\cos\theta=0 \Rightarrow \sin A=\sin A'=\left(1-\left(\frac{-1}{6}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{21}}{6}$

8: $C^4_0(1-p)^4+C^4_1(1-p)^3p+C^4_2(1-p)^2p^2 > C^2_0(1-p)^2+C^2_1(1-p)p$
$\Rightarrow(1-p)^2(p^2-2p+1+4p-4p^2+6p^2)>(1-p)(1+p)$ $\Rightarrow -3p^3+p^2+p+1>1+p \Rightarrow p^2(1-3p)<0 \Rightarrow 0<p<\frac{1}{3}$

8. 最新網路遊戲CS2 online因電腦配備需求較高，在每次大戰中，造成每顆CPU lag（延緩執行程式）的機率為$P$，現有相同製程、規格的雙核心（2顆CPU）與四核心（4顆CPU）兩臺電腦，研究人員指出，若一半以下（含一半）的CPU發生lag仍可完成1次大戰，今欲使四核心電腦完成1次大戰的機率大於雙核心電腦，研究人員應將$P$校正到範圍？$0<P<\frac{1}{3}$

2024.5.5(日) 5.6(一) Ru

9. $x\in R$，$f(x)=x^2-4x+3$，若$f(|x|)=|f(x)|$，則$x$的範圍為何？$0\le x\le1$或$3\le x$

9: $y=f(|x|)=\begin{cases}x^2-4x+3, & x\ge0\\x^2+4x+3, & x<0\end{cases}$ $y=|f(x)|=|(x-1)(x-3)|$ $\Rightarrow 0\le x\le1$ or $x\ge3$

## 二、計算證明題（每題8分，共24分）

1. $n$筆數據$(x_i,y_i)$，$1\le i\le n$，若$n$筆數據$(x_i,y_i)$的相關係數存在並記為$r$，試用高中數學的方法證明$|r|\le1$。

法: $\sum(x_i-\mu_x)^2\sum(y_i-\mu_y)^2\ge\left(\sum(x_i-\mu_x)(y_i-\mu_y)\right)^2 \Rightarrow r^2\le1 \Rightarrow -1\le r\le1 \Rightarrow |r|\le1$

法2: $\sigma_{x'}^2=\frac{1}{n}\left(\sum(x_i')^2-n\mu_{x'}^2\right)=\frac{1}{n}\sum(x_i')^2=1$, $\sum(x_i'\pm y_i')^2=\sum(x_i')^2+(y_i')^2\pm2x_i'y_i'\ge0 \Rightarrow -2n\le2\sum x_i'y_i'\le2n \Rightarrow -1\le r\le1$

2. 請利用108課綱高一學生可以理解的方法證明：已知點$P(x_0,y_0)$，直線$L:ax+by+c=0$，則$P$到$L$的距離為$\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$。

$\left|y_0-\frac{-ax_0-c}{b}\right|\cdot\frac{|b|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ $(x_0,\frac{-ax_0-c}{b})$ $L: ax+by+c=0$ $P(x_0,y_0)$ $m=-\frac{a}{b}$ $\sqrt{a^2+b^2}$ $|a|$ $|-b|$

3. 令$x_1,x_2,\cdots,x_{18}$為方程式$x^{18}+4x^{11}+1=0$的18個根，求$(x_1^4+x_1^2+1)(x_2^4+x_2^2+1)\cdots(x_{18}^4+x_{18}^2+1)$的值為何？336

3 "因式分解" $x^6-1=(x^2-1)\boxed{(x^4+x^2+1)}=(x-1)(x-w^3)\times\boxed{(x-w)(x-w^2)(x-w^4)(x-w^5)}$ $-1=w^3$

$f(x)=x^{18}+4x^{11}+1=\prod_{i=1}^{18}(x-x_i)$ $\quad \prod_{i=1}^{18}(x_i-w)(x_i-w^2)(x_i-w^4)(x_i-w^5)=f(w)f(w^2)f(w^4)f(w^5)$

$w^6=1$ $(4w^5+2)(4w^4+2)(4w^2+2)(4w+2)=16(2w^5+1)(2w+1)(2w^4+1)(2w^2+1)=16(5+2(w+w^5))(5+2(w^2+w^4))$
$=16(25+10(w+w^2+w^4+w^5)+4(w^3+w^5+w+w^3))=16(25+4(-1+1-1))=16\times21=336$