113 全國

法2：$\cos\beta = \dfrac{b\cos C}{3a-c}$ $\Rightarrow \dfrac{a^2+c^2-b^2}{c} = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{3a-c}$ $\Rightarrow (3a)b^2 = 3a(a^2+c^2)-(3a)(2ac\cdot\boxed{\frac{1}{3}})$ $=\cos\beta$

[1] 三角試不出時

[2] 令 $t=\log_5 4 \Rightarrow \sqrt{t}-\dfrac{1}{\sqrt{t}}+\dfrac{1}{\sqrt{t}}-\dfrac{1}{\sqrt{t}}=0$

第一部分：選擇題（共40分）

2024.5.5(日) ~ 2024.5.7(二) 22:06 Ru

一、單選題（每題3分，共24分）

[1] 法：(D) 1. 在 ΔABC 中 a,b,c 分別為角 A,B,C 的對邊，向量 $\overrightarrow{u}=(b,3a-c)$，$\overrightarrow{v}=(\cos B,\cos C)$，且 $\overrightarrow{u}\,//\,\overrightarrow{v}$，求 $\cos B=$？

$\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}=\dfrac{3\sin A-\sin C}{\cos C}$

$\Rightarrow \sin A$

$=\sin\beta\cos C+\cos\beta\sin C$

$=3\sin A\boxed{\cos\beta} = \frac{1}{3}$

(A)$\dfrac{1}{2}$ (B)$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (C)$\dfrac{3}{\sqrt{10}}$ (D)$\dfrac{1}{3}$。

[5] 設 $f(x)=x+A$，$g(x)=2x+B$

$\int_0^2 f(x)dx=\left(\frac{1}{2}x^2+Ax\right)\Big|_0^2=2A+2$

$\int_0^1 g(x)dx=(x^2+Bx)\Big|_0^1=B+1$

$\begin{cases}B+4=A\\2A-7=B\end{cases} \Rightarrow A=3,\ B=-1$

$\Rightarrow f(x)=x+3$，$f(3)=6$

(D) 2. 若 $f(x)=2^x-\dfrac{1}{2^x}$，求 $f(\log_4(\log_5 4))+f(\log_4(\log_4 5))=$？(A)5 (B)$\sqrt{2}$ (C)1 (D) 0。

(C) 3. 任意的選取兩個正整數 a，b 且 $1\le a,b\le 9$。試問點 (a,b) 落在拋物線 $y=ax^2-bx$ 上方的機率為何？

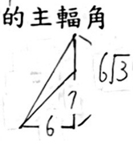
[3] $b>a^3-ab \Rightarrow \dfrac{a^3}{a+1}<b$

a	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$a^3/a+1$	$\frac{1}{2}$	$\frac{8}{3}$	$\frac{27}{4}$	$\frac{64}{5}$	$\frac{125}{6}$	$\frac{216}{7}$	$\frac{343}{8}$	$\frac{512}{9}$	$\frac{729}{10}$
b	1-9	3-9	7-9						

$\Rightarrow (9+7+3)/81=\dfrac{19}{81}$

(A)$\dfrac{15}{81}$ (B)$\dfrac{17}{81}$ (C)$\dfrac{19}{81}$ (D)$\dfrac{7}{27}$。

(B) 4. 設 a, b 為整數且 $(a+3i)(b+i)=12+14i$，若 α, β 分別為 $a+3i$ 及 $b+i$ 的主幅角 $(0°\le\alpha,\beta<360°)$，令 $\theta=\alpha+\beta$，下列何者正確？

[4] 

(A)$\theta=45°$ (B)$45°<\theta<60°$ (C)$\theta=60°$ (D)$60°<\theta<90°$。

(D) 5. 設 $f(x)=x+3+\int_0^1 g(x)dx$，$g(x)=2x-9+\int_0^2 f(x)dx$，試求 $f(3)=$？

(A)0 (B)2 (C)4 (D)6。

(D) 6. 已知 ΔABC 的三邊長為 a,b,c，且 $\log_a b$ 是方程式 $x^2-2x+\sin C+\cos C=0$ 的重根，問 ΔABC 是哪一種三角形？

[6] $2\log_a b=2 \Rightarrow a=b$，$\sin C+\cos C=1 \xRightarrow{\text{平方}} 2\sin C\cos C=\sin\boxed{2C}=0$

$\angle\ =180°$

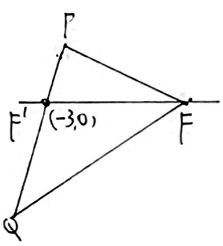
$\Rightarrow \angle C=90°$

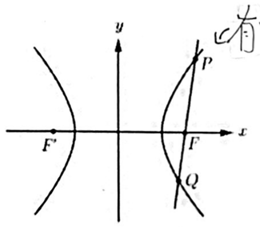
(A)銳角三角形 (B)正三角形 (C)鈍角三角形 (D) 等腰直角三角形。

(C) 7. 在某教師甄試中規定 N 位參加筆試者，可進入複試的人數為 $2^{1+[\log_2(N-1)]}-N$。已知進入複試的人數為19位，試問最小的兩個可能 N 的值之和為何？($[x]$ 代表不大於 x 的最大整數) (A)38 (B)90 (C)154 (D) 406。

(D) 8. 如圖，雙曲線 Γ：$\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{5}=1$ 中，過焦點 F 作一焦弦 $\overline{PQ}$，已知 $\overline{PQ}$ 的斜率為1，則 $\overline{PF'}+\overline{QF'}=$？ (A)32 (B)36 (C)40 (D)48。

[8]





有誤

[7] $2^{1+[\log_2(N-1)]}=19+N=2^{\square}$

$2^5=32=19+\boxed{13}$，$[\log_2 12]=3$ 不合

$2^6=64=19+\boxed{45}$，$[\log_2 44]=5$ ok

$2^7=128=19+\boxed{109}$，$[\log_2 108]=6$ ok

$109+45=154$

$\begin{cases}\overleftrightarrow{PQ}: x-y=-3\\ \Gamma: 5x^2-4y^2=20\end{cases}$ $\Rightarrow x^2-24x-56=0$

$5x^2-4(x+3)^2=20$

$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$

$=576+224=800$

$\overline{PQ}^2=2\cdot 800 \Rightarrow \overline{PQ}=40$

$\overline{PF}+\overline{QF}=40+(2a)\cdot 2=48$

$\boxed{9}$ $f'(x)=3x^2+2ax+b=3\left(x-\boxed{\frac{-a}{3}}\right)^2+\boxed{b-\frac{a^2}{3}}$ $\leftarrow$ $\frac{-D}{4A}=\frac{-(4a^2-12b)}{12}$

$\frac{-a}{3}=1 \Rightarrow a=-3$ $\quad b-3=\frac{0-0}{1-0}=0$

$f(1)=0$ $\Rightarrow b=3$

二、複選題（每題4分，共16分）

$f(x)=x^3-3x^2+3x-1=(x-1)^3$

（ AB C ） 9. 設 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ 之圖形的所有切線中，以過切點(1, 0)之切線斜率為最小，且此切線亦通過原點，則下列哪些選項是正確的？

I.P. (1,0)

(A) $f''(1)=0$ (B) $f(x)$ 沒有極大值 (C) $y=f(x)$ 的圖形與 x 軸相切 (D)方程式 $f(x)=1$ 有三相異實根。

$\boxed{10}$

A: 1, $1+\frac{1}{2}$, $1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2$, ⋮ $\frac{1\cdot\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}{1-\frac{1}{2}}=2-2\left(\frac{1}{2}\right)^n$

2024 5/6(一) Ru

（ AD ） 10. 在實數線上，動點 A 從原點開始往正向移動，動點 B 從8的位置開始往負向移動。兩個動點每一秒移動一次，已知第一秒 A、B 移動的距離分別為1、4，且 A、B 每次移動的距離分別為其前一次移動距離的 $\frac{1}{2}$ 倍、$\frac{1}{3}$ 倍。令 c_n 為第 n 秒時 A、B 的中點位置。試選出正確的選項。

$C_2=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}+4-\frac{4}{3}\right)=\frac{3}{4}+\frac{4}{3}=\frac{25}{12}<\frac{30}{12}=\frac{5}{2}=C_1$

(A) $c_1=\frac{5}{2}$ (B) $c_2>c_1$ (C)數列 $\langle c_{n+1}-c_n\rangle$ 是一個等比數列 (D) $\lim_{n\to\infty}c_n=2$。

B: $8-4$, $8-4-4\left(\frac{1}{3}\right)^1$, $8-4-4\left(\frac{1}{3}\right)^1-4\left(\frac{1}{3}\right)^2$, ⋮ $8-4\cdot\frac{1\cdot\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)}{1-\frac{1}{3}}$ $=2+6\left(\frac{1}{3}\right)^n$

（ BC D ） 11. 投擲一枚不均勻硬幣，出現正面的機率為 $\frac{3}{4}$，出現反面的機率為 $\frac{1}{4}$。今丟擲此硬幣5次，若 X 表示出現正面的次數，則下列敘述何者正確?

(A) $X=1$ 的機率為 $\frac{15}{512}$ (B) $X=2$ 的機率小於 $X=3$ 的機率 (C) X 的期望值為 $\frac{15}{4}$ (D) X 的標準差為 $\frac{\sqrt{15}}{4}$。

$\boxed{11}$ $X\sim Bin\left(n=5,\ p=\frac{3}{4}\right)$ $\quad P(X=1)=C^5_1\left(\frac{3}{4}\right)^1\left(\frac{1}{4}\right)^4=\frac{15}{1024}$

$EX=np=\frac{15}{4}$ $\quad Var(X)=np(1-p)=\frac{15}{16}$ $\quad P(X=2)=C^5_2\left(\frac{3}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^3<C^5_3\left(\frac{3}{4}\right)^3\left(\frac{1}{4}\right)^2=P(X=3)$

（ BD ） 12. 已知 $C_1:(x-1)^2+y^2\le 1$，$C_2:x^2+(y-1)^2\le 1$，試選出正確的選項。

(A) C_1 繞 x 軸旋轉所得的旋轉體體積為 π^2 立方單位 (B) C_1 繞 x 軸旋轉所得的旋轉體體積為 $\frac{4}{3}\pi$ 立方單位 (C) C_2 繞 x 軸旋轉所得的旋轉體體積為 π^2 立方單位 (D) C_2 繞 x 軸旋轉所得的旋轉體體積為 $2\pi^2$ 立方單位。

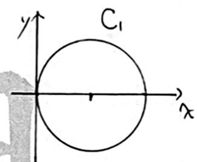
$C_{n+1}=2-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n+\left(\frac{1}{3}\right)^n$

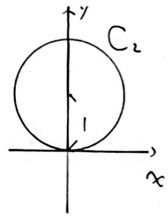
$-)\ C_n=2-\left(\frac{1}{2}\right)^n+3\left(\frac{1}{3}\right)^n \to 2$

$\Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^n\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}\right)^n(-2)$

不是 G.P.

$\boxed{12}$





$2\pi\cdot 1\cdot(\pi\cdot 1^2)=2\pi^2$

$\frac{4}{3}\pi\cdot 1^3=\frac{4}{3}\pi$

第二部分：綜合題（共60分）

一、填充題（每格4分，共36分）

1. 設 $f(x)=x^2-16$，若 $P=\{x_0,x_1,x_2,\cdots,x_k,\cdots,x_{n-1},x_n\}$ 為[1,3]的 n 等分割，$n\in N$，且知黎曼下和 L_n，且知黎曼上和 U_n，若 $|U_n-L_n|<\frac{1}{10000}$，試求最小之自然數 n？n=160001

2. θ 為某一角度，方程組 $\begin{cases}x\cos\theta-y\sin\theta=4\\x\sin\theta+y\cos\theta=3\end{cases}$，的解為 $(1,2\sqrt{6})$，試求 $\begin{cases}x\cos\theta-y\sin\theta=-3\\x\sin\theta+y\cos\theta=4\end{cases}$ 的解 (x,y)。$(-2\sqrt{6},1)$

$\Delta x=\frac{2}{n}$ $\quad x_i=1+\frac{2}{n}i$

$\boxed{2}$ $4+3i=(1+2\sqrt{6}i)e^{i\theta}$ $\quad \downarrow\times i \quad \downarrow\times i$ $\quad -3+4i=(-2\sqrt{6}+i)e^{i\theta}$ $\quad i=e^{i\left(\frac{\pi}{2}\right)}$

$\boxed{1}$ $\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\Delta x-\sum_{i=1}^{n-1}f(x_i)\Delta x$ $=\left(f(3)-f(1)\right)\cdot\frac{2}{n}=\frac{16}{n}<\frac{1}{10000}$ $\Rightarrow n>160000 \Rightarrow 160001$