臺北市立內湖高級工業職業學校 113 學年度正式教師甄選

筆試題目卷

科別：數學科　　範圍：數學科專業知能　　考試時間：100 分鐘

請注意：本試題共有兩部分，填充題 10 題及計算證明題 3 題，合計 100 分；

不可使用電子計算器。

壹、填充題 (每題 7 分，共 70 分；請在答案卷相對應的題號欄中寫下答案。)

(1) 求多項式 $(x^5+2x^2+x+3)^2$ 除以 (x^4+x-1) 所得之餘式為 ＿＿＿＿＿＿。

(2) 若 n 為正整數，且$a_n=\sqrt[3]{(n+1)^2}+\sqrt[3]{n^2-1}+\sqrt[3]{(n-1)^2}$，試求

$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_3}+\frac{1}{a_5}+\cdots+\frac{1}{a_{4095}}=$ ＿＿＿＿＿＿＿＿。

(3) 空間中相異四點 A、B、C、D，其中 $\overline{AB}=3$、$\overline{BC}=2$、$\overline{CD}=1$，且$\angle ABC=120°$、$\angle BCD=120°$，又 $\overrightarrow{AB}$ 與 $\overrightarrow{CD}$ 的夾角為 $60°$，則 $\overline{AD}$ 的長 = ＿＿＿＿＿ 。

(4) 有 3 位高二學生與至少 10 位高三學生一起比賽猜拳，所有人彼此都恰比賽一次，每次比賽的兩位同學採用同時各出一拳的方式進行；勝者得 2 分，敗者得 0 分，若和局則各得 1 分。比賽結束後，已知 3 位高二學生總分之和為 20 分，且每位高三學生皆得 P 分，則 P =＿＿＿＿ 。

(5) 投擲一顆公正的骰子四次，其出現點數依次為a、b、c、d，則

$(a-3)^2+(b-3)^2+(c-3)^2+(d-3)^2=4$ 之機率為 ＿＿＿＿＿。

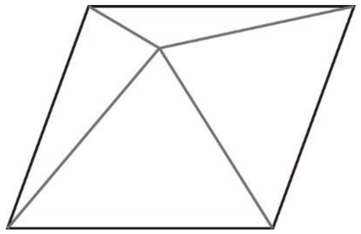
(6) $[x]$表示小於或等於 x 的最大整數，則 $\left[\frac{10^{2025}}{10^{675}+2025}\right]$ 的末三位數為 ＿＿＿＿。

(7) 橢圓 $\Gamma:\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{10}=1$ 以原點為旋轉中心，逆時針旋轉 $45°$ 後，得一新的橢圓 Γ'，則橢圓 Γ' 的方程式為 ＿＿＿＿＿。(答案請以 $ax^2+bxy+cy^2+d=0$ 的方式呈現，其中 a、b、c、$d\in Z$)

(8) 將曲線 $y=1-x^2$ 與直線 $x+y+1=0$ 所圍成的封閉區域，繞 x 軸旋轉一圈所形成的旋轉體體積為＿＿＿＿＿＿。

(9) $x^7=1$的七個根在高斯平面上所表示的點為 A,B,C,D,E,F,G，則$(\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{AD}\cdot\overline{AE}\cdot\overline{AF}\cdot\overline{AG})$ ．$(\overline{AB}^2+\overline{AC}^2+\overline{AD}^2+\overline{AE}^2+\overline{AF}^2+\overline{AG}^2)=$________。

(10) 在空間中，一個斜面的「坡度」定義為斜面與水平面夾角 θ 的正切值 $\tan\theta$，有一個四角錐（底部為一正方形，四個斜面為等腰三角形）的每一個斜面的坡度皆為 $\frac{2}{5}$，如下圖所示。若相鄰斜面的夾角為 α ，則 $\cos\alpha$ 的值為_______。（化為最簡分數）



貳、計算證明題(每題 10 分，共 30 分；請在答案卷相對應的題號中作答，並請寫下完整的計算或證明過程，否則不予計分。)

(1) 已知直線 L (斜率為 m、$m>0$) 通過拋物線 $y^2=2x$ 的焦點，且與拋物線交於 A、B 兩點；設 A、B 兩點的 x 座標分別為 α、β ，若 O 為原點，則 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ = ________。

(2) 在函數 $f(x)=\frac{1}{x^2}$ 圖形的第一象限部分取一動點 P，過 P 作 f 的切線 L，若 L 與 x 軸、y 軸分別交於 A、B 兩點，則 $\overline{AB}$ 之最小值為______(5 分)，此時 P 點坐標為_____。(5 分)

(3) 請證明

$$\sum_{k=1}^{90} 2k\sin 2k^\circ \text{ 的平均值} = \cot 1^\circ$$

《試題結束》