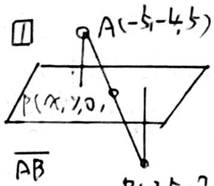
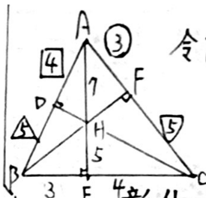
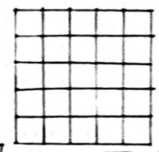
彰化女中113學年度教師甄選數學科試題卷

2024 5/4(五)

一、填充題(每5分，共90分)







1、x，y為實數，則$\sqrt{(x+5)^2+(y+4)^2+25}+\sqrt{(x-3)^2+(y-5)^2+49}$之最小值是 17 。

$\overline{AB}=|(8,9,12)|=\sqrt{289}=17$

2、將一塊正方形的厚紙板劃分成面積相等的$5\times5=25$個小正方格，今欲將三枚不同顏色的棋子任意放置於小正方格的中心處，且每個小正方格至多只能放置一枚棋子。試問：這三枚棋子可構成三角形的三個頂點之機率為 537/575

$1-\frac{152\cdot6}{25\cdot24\cdot23}=1-\frac{38}{575}=\frac{537}{575}$

3、設$f(x)=x+\frac{2}{x}+\frac{64}{9}\left(\frac{x}{x^2-x+2}\right)$，$x>0$。設正數$a$使得函數$f(x)$有最小值$f(a)$，則所有符合之$a$的總和為 $\frac{11}{3}$ 。

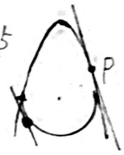
$x+\frac{2}{x}-1+\frac{64}{9}\cdot\frac{1}{x+\frac{2}{x}-1}\Rightarrow x+\frac{2}{x}-1=\frac{8}{3}\Rightarrow 3x^2-11x+6=0\Rightarrow \alpha+\beta=\frac{11}{3}$

4、設$f(x)$為可微分函數，若$f(1)=2$，$f'(1)=5$，則$\lim_{x\to1}\frac{x^2f(1)-f(x^2)}{x-1}=$ -6

$\lim_{x\to1}\frac{2xf(1)-f'(x^2)\cdot2x}{1}=4-10=-6$

5、若S_n為曲線$y=x^{n+1}$與$y=x^n$，$n\in N$所圍區域的面積，則$\sum_{n=1}^{\infty}S_n=$ $\frac{1}{2}$ 。

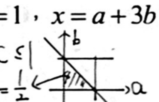
$x^n(x-1)=0$，$\int_0^1(x^n-x^{n+1})dx=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{1}{2}$



6、將六面均塗紅漆之正立方體木塊(邊長為10)，鋸成1000個大小相同的小正立方體(邊長為1)混置一袋中，若自袋中任取兩塊，則兩塊小正立方體的十二面中，有塗紅漆面數的期望值為 6/5 面。

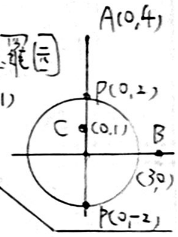
$\left((8\times8\times6)\times1+(8\times4\times3)\times2+(8)\times3\right)\times\frac{1}{1000}=\frac{3}{5}$，$\frac{3}{5}\times2=\frac{6}{5}$

7、設$a\ge0$，$b\ge0$，$c\ge0$，$a+b+c=1$，$x=a+3b+4c$，$y=2a+b+3c$，求在xy平面上點(x,y)所形成區域的面積為 5/2 。



$0\le a+b=1-c\le1$，$x=-3a-b+4$，$y=-a-2c+3$，$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3&-1\\-1&-2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix}$，$\left|\begin{vmatrix}-3&-1\\-1&-2\end{vmatrix}\right|\cdot\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$

8、在複數平面上，$|z(-1+\sqrt{3}i)|=4$，求$\frac{1}{2}|z-4i|+|z-3|$最小值為 $\sqrt{10}$



令 $P\in|Z|=2$，$A(0,4)$，$B(3,0)$，阿波羅圓，$\overline{PA}:\overline{PB}=2:1\Rightarrow C(0,1)$，$\frac{1}{2}\overline{PA}+\overline{PB}=\overline{PC}+\overline{PB}\ge\overline{BC}=\sqrt{10}$

9、若H為ΔABC垂心，且$\overrightarrow{AH}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$，求$\cos\angle BAC=$ $\frac{\sqrt{6}}{6}$ 。

10、已知$\int_1^x f(t)dt=\frac{1}{3}x^3+ax+b$其中$a$、$b\in R$，$g(x)=2^x+2^{-x}$，若$f(x)$與$g(x)$交於A、B兩點，且$\overline{AB}=2$，求$a-b=$ 10/3 。

$f(x)=x^2+a=f(-x)$，$f(1)=a+1=2+\frac{1}{2}\Rightarrow a=\frac{3}{2}$，$\frac{1}{3}+\frac{3}{2}+b=0\Rightarrow a-b=\frac{11}{3}$

11、如果x，y為實數，$-\sqrt{4-x^2}\le y\le-x^2+4$，求$3x+y$的範圍 $-2\sqrt{10}\le k\le\frac{25}{4}$

12、數列$\langle a_n\rangle$滿足遞迴關係$\begin{cases}a_1=2\\a_{n+1}=\frac{3}{2a_n+1}\end{cases}$，$n\ge1$，求$\lim_{n\to\infty}(a_n-1)(-\frac{3}{2})^n=$ $\frac{-15}{14}$

13、求$\left(1+x+x^2+x^3\right)^6$展開式中$x^5$的係數= 216

$H^6_5-C^6_1H^6_1=C^{10}_5-36=216$

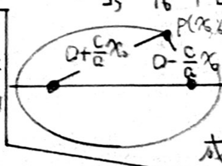
14、彰女某班段考數學平均60，標準差5，物理平均70，標準差6，若每人將兩科分數相加，其標準差為9，求物理(y)對數學(x)的迴歸直線 $y-70=\frac{2}{5}(x-60)$

$Var(X_1+X_2)=Var(X_1)+Var(X_2)+2Cov(X_1,X_2)$，$81=25+36+2(10)$，$r=\frac{Cov(X_1,X_2)}{Var(X_1)}=\frac{10}{25}=\frac{2}{5}$

15、設$0.216\le x\le1$，求$f(x)=x^{(\log_{0.6}x-2)^3}$的最大值為 $0.6^{-\frac{27}{16}}$

$3=\log_{0.6}0.216\ge t=\log_{0.6}x\ge0$，$\log_{0.6}y=t(t-2)^3$，微分 $(t-2)^3+t\cdot(3(t-2)^2)=(t-2)^2(4t-2)=0$，$t=\frac{1}{2}\Rightarrow y=0.6^{-\frac{27}{16}}$

16、已知滿足方程式$|z+3|+|z-3|=10$的三個複數z_1、z_2、z_3中，$|z_1+3|$、$|z_2+3|$、$|z_3+3|$為等差數列，已知$z_2=\frac{5}{4}+\sqrt{15}i$，求$\text{Re}(z_1+z_3)=$ $\frac{5}{2}$ 。(Re(z)表z的實部)



$c=3$，$a=5$，$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$，$a+\frac{c}{a}x_1$，$a+\frac{c}{a}x_2$，$a+\frac{c}{a}x_3$ 成A.P. $\Rightarrow x_1,x_2,x_3$ 成A.P. $\Rightarrow x_1+x_3=2\cdot\frac{5}{4}=\frac{5}{2}$

9 $\overrightarrow{AH}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$

洪2 (yymath) $\cos A=$ ______

Sol: $5\overrightarrow{HA}+4\overrightarrow{HB}+3\overrightarrow{HC}=\vec{0}$

$\Rightarrow \tan A:\tan B:\tan C = 5:4:3$

$\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$

$\Rightarrow 5t+4t+3t=5t\cdot 4t\cdot 3t$

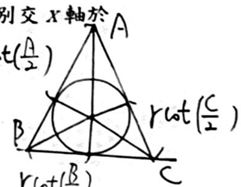
$\Rightarrow \tan A=5\cdot\frac{1}{\sqrt{15}}=\sqrt{15}$

$\Rightarrow \cos A=\frac{1}{\sqrt{16}}$

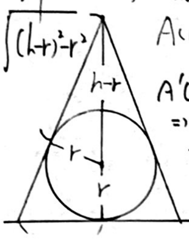
17 "正△時有min"

17、座標平面上有一個橢圓 $\Gamma:\frac{x^2}{25}+\frac{(y-3)^2}{9}=1$ 及一點 $P(0,a)$，其中 $a>6$，由 P 點向橢圓作兩切線，分別交 x 軸於 $A,\ B$ 兩點，當 $a=m$ 時 ΔPAB 面積有最小值 M，則數對 $(m,M)=$ $(9,45\sqrt{3})$。

洪2



法1



$A(h)=r\cdot\frac{h^2}{\sqrt{h^2-2rh}}$

$A'(h)=0$

$\Rightarrow 2h\sqrt{h^2-2rh}=\frac{h^2(h-r)}{\sqrt{h^2-2rh}}$

$\Rightarrow 2(h^2-2rh)=h^2-hr$

$\Rightarrow h^2=3rh \Rightarrow h=3r \Rightarrow \frac{h-r}{r}=\frac{2}{1}$ (正△)

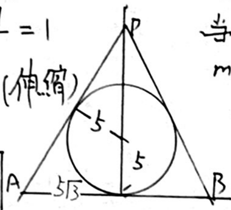
$h\cdot\frac{r}{\sqrt{h^2-2rh}}$

$T':\frac{(x')^2}{25}+\frac{(y')^2}{25}=1$

$T:\frac{x^2}{25}+\frac{\square}{9}=1$

$\square=\frac{9}{25}(y')^2$ (伸縮)

$\Rightarrow y=\frac{3}{5}y'$



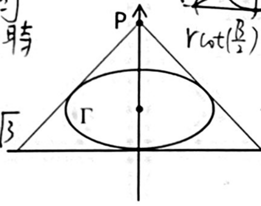
先視為 r=5 的圓

當 △PAB 為正△時

min = $75\sqrt{3}$

$M=75\sqrt{3}\cdot\frac{3}{5}=45\sqrt{3}$

$a=15\cdot\frac{3}{5}=9$



$y=\cot x$ is convex on $(0,\frac{\pi}{2})$

|

Jensen's inequality

↓

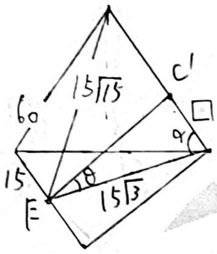
$\Delta=r^2\left[\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}\right]$

$\geq 3\cot\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}(A+B+C)\right)$

當 ∠A=∠B=∠C 時 有 min

18、在攝影器材中，三腳架是用來穩固相機提升拍照品質的重要工具，可以利用腳架的伸縮以保持相機的水平視角。將某三腳架置於水平地面時（如圖一所示），三個腳架底 A、B、C 兩兩距離皆為 30 公分，且最高點 D 與 A、B、C 三點的距離皆為 60 公分。現將此三腳架置於一傾斜角為 $\cos^{-1}\frac{5}{6}$ 的斜坡上（如圖二所示），使 A、B 兩點位於斜面與地面之交線上，此時若將 $\overline{CD}$ 縮短為 $\overline{C'D}$，可保持三腳架的高度不變（即 D 點與水平地面的高度不變），以維持相機視角仍為水平。請求出圖二中線段 $\overline{CC'}=$ 15。

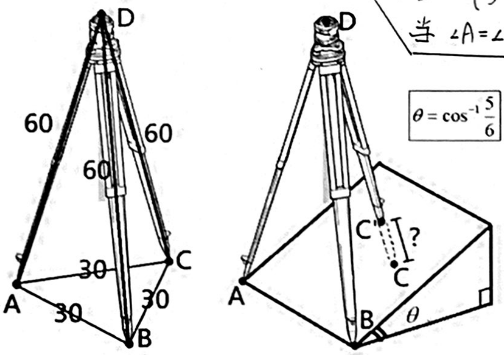
18



$\cos\alpha=\frac{4}{2\cdot 4\sqrt{3}}=\frac{1}{2\sqrt{3}}$

$\sin(\alpha+\theta)=\frac{5\sqrt{11}+\sqrt{11}}{2\sqrt{3}\cdot 6}=\frac{\sqrt{11}}{2\sqrt{3}}$

$\frac{\square}{\frac{\sqrt{11}}{6}}=\frac{15\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{11}}{2\sqrt{3}}}\Rightarrow \square=15$ #



(圖一)　(圖二)

二、計算證明題(共 10 分)

1 (1) 設 $A^k=\alpha_k A+(1-\alpha_k)I \Rightarrow A^{k+1}=\alpha_k(0.4A+0.6I)+(1-\alpha_k)A$

n=2 成立

$=\boxed{(1+0.6\alpha_k)}A+\boxed{0.6\alpha_k}I \Rightarrow$

$\alpha_{k+1}+\beta_{k+1}=1$

1、

給定轉移方陣 $A=\begin{bmatrix}0.1 & 0.7\\0.9 & 0.3\end{bmatrix}$、單位方陣 $I=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$，小夫計算 A^n 時，利用將 A^n 表示為 A 與 I 的線性組合來簡化計算，表示為 $A^n=\alpha_n\cdot A+\beta_n\cdot I$。例如：

$A^2=\begin{bmatrix}0.64 & 0.28\\0.36 & 0.72\end{bmatrix}=0.4\cdot A+0.6\cdot I$，此時 α_2=0.4、$\beta_2=0.6$；

$A^3=\begin{bmatrix}0.316 & 0.532\\0.684 & 0.468\end{bmatrix}=0.76\cdot A+0.24\cdot I$，此時 α_3=0.76、$\beta_3=0.24$。

1 (2) $x=-\frac{3}{5}x+1 \Rightarrow x=\frac{5}{8}$

請根據以上敘述，證明：

(1) 對於所有自然數 $n\geq 2$，$\alpha_n+\beta_n=1$。(2 分)

(2) 對於所有自然數 $n\geq 2$，皆滿足 $\alpha_{n+1}=-0.6\cdot\alpha_n+1$，並以此求 $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n$ 之值。(3 分)

2、

證明：對於所有大於 1 的自然數 n 而言，$\sin\frac{\pi}{n}\cdot\sin\frac{2\pi}{n}\cdot\sin\frac{3\pi}{n}\cdot\ \cdots\ \cdot\sin\frac{(n-1)\pi}{n}=\frac{n}{2^{n-1}}$ 恆成立。(5 分)

2

x^n-1

$=(x-1)\boxed{(x^{n-1}+\cdots+x+1)}$

$=(x-1)\boxed{(x-w)(x-w^2)\cdots(x-w^{n-1})}$

令 $\theta=\frac{2\pi}{n}$

$w=e^{i\theta}$

$1-w^k=2\left(\frac{1-\cos(k\theta)}{2}\right)-2\sin\left(\frac{k\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{k\theta}{2}\right)\cdot i$

$=2\sin\left(\frac{k\theta}{2}\right)\left(\sin\left(\frac{k\theta}{2}\right)-i\cos\left(\frac{k\theta}{2}\right)\right)$

$x=1$ 代入 $\boxed{}$

$\Rightarrow n=2^{n-1}\cdot\prod_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{k}{n}\pi\right)$

#

2024.5/12(日) 12:25

星巴克　Ru