113 文華

$\boxed{13}$

13. 矩陣 $A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$、$B=\begin{bmatrix}\sqrt{3} & -1\\ 1 & \sqrt{3}\end{bmatrix}$、$I=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$，若 α、β、γ 皆為正整數，且 $A^{\alpha}B^{\beta}=2^{8-\gamma}I$，則序組 $(\alpha,\beta,\gamma)=$ $\underline{(6,3,2)}$。

$A\to\sqrt{2}\,e^{i(\frac{\pi}{4})}$

$B\to 2\,e^{i(\frac{\pi}{6})}$

$\frac{\alpha}{2}+\beta=8-\gamma$ $\Rightarrow 2\mid\alpha$

$(\frac{\alpha}{4}+\frac{\beta}{6})\pi=(2\pi)\cdot k$ $\in\mathbb{Z}$

$\Rightarrow 3\alpha+2\beta=24k$

α	β	$\frac{\alpha}{2}+\beta$	γ	
2	9	11	-3	(×)
4	6	8	0	(×)
6	3	6	2	(✓)

14. 試求 $1^2C^{16}_1\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^{15}+2^2C^{16}_2\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^{14}+3^2C^{16}_3\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)^{13}+\ldots+16^2C^{16}_{16}\left(\frac{1}{4}\right)^{16}=$ $\underline{19}$。

$\boxed{14}$ $X\sim Bin(n=16,\ p=\frac{1}{4})$ $\quad Var(X)=E(X^2)-(EX)^2$

$16\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}+16\cdot\frac{1}{4}\cdot16\cdot\frac{1}{4}=16\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{19}{4}=19$

15. 坐標平面上有兩定點 $A(-1,0)$、$B(1,1)$，P 為橢圓 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 上一點，則 $2\overline{PA}+\overline{PB}$ 的最小值為 $\underline{5}$。

16. 空間中三點 P、Q、R 分別在直線 $L_1:\frac{x-3}{1}=\frac{y-6}{2}=\frac{z+1}{-2}$、$L_2:\frac{x-2}{-2}=\frac{y-7}{2}=\frac{z-4}{1}$、$L_3:\frac{x-1}{2}=\frac{y-5}{1}=\frac{z-6}{2}$ 上，則 $\overline{PQ}+\overline{PR}$ 的最小值為 $\underline{3\sqrt{5}}$。

$\boxed{15}$

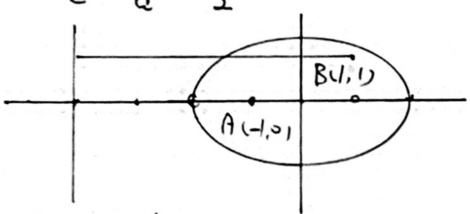
$\overline{PF}=d(P,L)\cdot e$

$e=1$：拋物線

$0<e<1$：橢圓 $\quad e=\frac{c}{a}$

$e>1$：双曲線

$e=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$



$L: x=-4$

$\overline{PA}=\frac{1}{2}\cdot d(P,L)$

$2\overline{PA}+\overline{PB}=d(P,L)+\overline{PB}\geq d(B,L)=5$

$\boxed{16}$

$$\begin{array}{c|cccccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 & 2 & -2 & \\ -2 & 2 & 1 & -2 & 2 & 1 & \\ \hline & 6 & 3 & 6 & & & \end{array}$$

E_{12}: $2x+y+2z \overset{(3,6,-1)}{=\!=} 10$

$L_1, L_2 \overset{(2,7,4)}{\Longrightarrow} \frac{9}{3}=3$

$$\begin{array}{c|cccccc} 1 & 2 & -2 & 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ \hline & 6 & -6 & -3 & & \end{array}$$

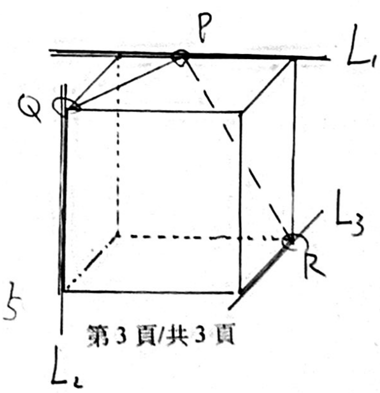
E_{13}: $2x-2y-z \overset{(3,6,-1)}{=\!=} -5$

$L_1, L_3 \overset{(1,5,6)}{\Longrightarrow} \frac{9}{3}=3$

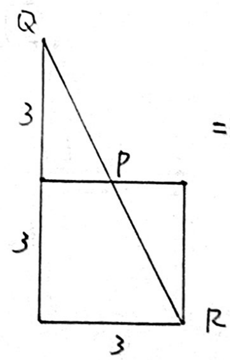
$$\begin{array}{c|cccccc} -2 & 2 & 1 & -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ \hline & 3 & 6 & -6 & & \end{array}$$

E_{23}: $x+2y-2z \overset{(2,7,4)}{=\!=} 8$

$L_2, L_3 \overset{(1,5,6)}{\Longrightarrow} \frac{9}{3}=3$



$\longrightarrow$

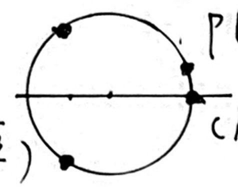


$\Rightarrow 3\sqrt{5}$

113 文華

計算 1

(1)



$P(\cos\theta,\sin\theta)\overset{令}{=}(c,s)$ $\quad (c-1)^2+s^2+(c+\frac{1}{2})^2+(s-\frac{\sqrt{3}}{2})^2+(c+\frac{1}{2})^2+(s+\frac{\sqrt{3}}{2})^2$

坐標平面上有一圓內接正三角形ABC，且有一點P在圓上，試證：

$= 3+1+1+1=6 \longrightarrow 6R^2$

(1) $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2$和$P$點的選取位置無關。

(2) $(\alpha+\beta+\gamma)^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$

(2) $\overline{PA}^4+\overline{PB}^4+\overline{PC}^4$和$P$點的選取位置無關。

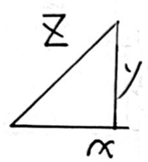
$36-2\Big(\overset{\alpha(\beta+\gamma)}{(2-2c)(4+2c)}+\overset{+\beta\gamma}{(2+c-\sqrt{3}s)(2+c+\sqrt{3}s)}\Big)$

計算 2

$=36-2(8-8c+4c-4c^2+4+4c+c^2-3s^2)=36-2(12-3)=18 \to 18R^2$

設有一直角三角形周長為a，試求斜邊長的範圍。

$[(\sqrt{2}-1)a,\frac{1}{2}a)$



$2z^2=(x^2+y^2)(1^2+1^2)\geq(x+y)^2=(a-z)^2$

$\Rightarrow z^2+2az-a^2\geq0 \Rightarrow z\geq(\sqrt{2}-1)a$

or $z\leq(-\sqrt{2}-1)a$ (不合)

$a-z=x+y>z$

$\Rightarrow z<\frac{a}{2}$

計算 3

坐標平面上有三相異直線：$a_1x+b_1y+c_1=0$、$a_2x+b_2y+c_2=0$、$a_3x+b_3y+c_3=0$

且三相異直線共點，則$\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}=0$，試列出三種證明方法。